¿Cuál es la forma de una casa Rapanui tradicional?

Una actividad matemática multicultural que involucra elipses

El pueblo Rapanui de la isla Rapa Nui, también conocida como Isla de Pascua, en algún momento tenía una escritura llamada Rongorongo. Desafortunadamente, la capacidad de leer Rongorongo se ha perdido desde entonces. Así que actualmente la arqueología y la tradición oral son las únicas fuentes disponibles para obtener información sobre las primeras personas de la isla. La tradición oral establece que las casas originalmente tenían sus techos en forma de canoas al revés, y por lo tanto se llaman *hare paenga,* o en inglés, casa bote. En la literatura, se dice que estas casas bote son de forma elíptica. En esta actividad, investigaremos la forma de restos arqueológicos de los cimientos de estas casas para determinar si realmente tienen forma de elipse.


(Izquierda) Réplica hare paenga mostrando la base de piedra con agujeros para fijar el techo de paja. (Derecha) Restos arqueológicos de una base de piedra de una hare paenga. Fotos tomadas por la Dra. Cynthia Huffman, 2019, Rapa Nui.

Repaso de Elipses:

Para simplificar, supongamos que nuestra elipse se configura en un sistema de coordenadas, centrado en el origen, con el eje principal en la vertical o dirección *y*, y el eje menor en la horizontal o dirección *x*. Una forma para la ecuación de una elipse genérica es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, donde la longitud del eje menor es $2a$ y la longitud del eje principal es $2b$.

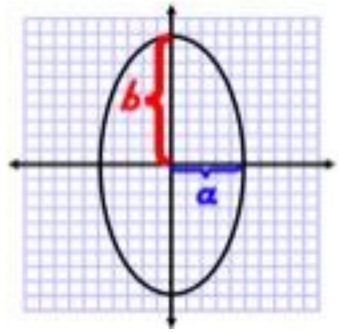
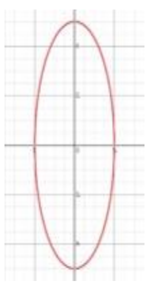
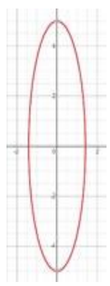
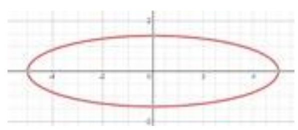
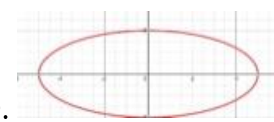


Figura 1

Lista de ejercicios 1

1. Identifique la ecuación con el gráfico. (Gráficos creados con Desmos en desmos.com.)

A.  B.  C.  D. 

_____ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ _____ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ _____ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{2}=1$ _____ $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{25}=1$

2. Escriba una ecuación de las siguientes elipses a partir de la información dada. Supongamos que el eje principal es el vertical para cada elipse.

a. Eje principal de 30 unidades y eje menor de 8 unidades

b. Eje mayor de 40 unidades y eje menor de 10 unidades

3. Para cada elipse encontrar la longitud del eje mayor y el eje menor, y marcar si el eje es vertical u horizontal.

a. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

eje mayor = ______unidades

eje menor = _____ unidades

vertical u horizontal

b. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{400}=1$

eje mayor = _____ unidades

eje menor = _____unidades

vertical u horizontal

Una elipse se define como una forma plana que consiste en el conjunto de todos los puntos cuyas distancias de dos puntos fijos, llamados focos, tienen la misma suma. Con una elipse orientada con el eje principal en la dirección vertical, los focos se ubicarían en el eje *y* con cada foco a la misma distancia del centro de la elipse. En el gráfico siguiente, se llamará *c* la distancia de un foco al origen y los focos se llamarán F_1 y F_2.

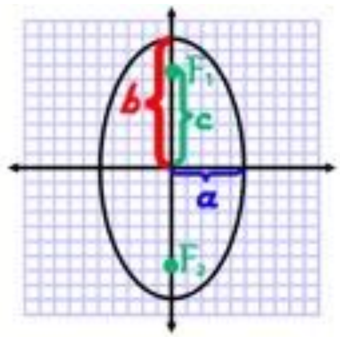


Figura 2

Como se mencionó anteriormente, si *P* es un punto cualquiera en la elipse, entonces la suma de la distancia de *P* a F_1 más la distancia de *P* a F_2 es constante.

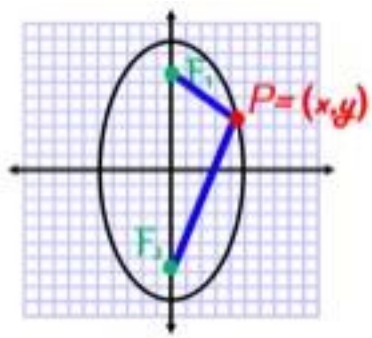
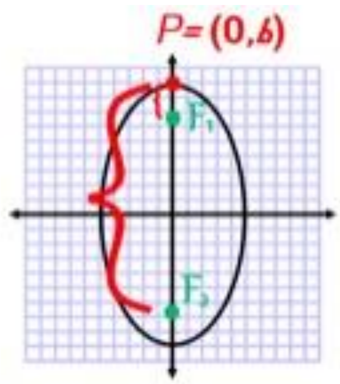


Figura 3

Podemos determinar esta suma constante considerando un punto en particular, como, por ejemplo, uno de los puntos finales del eje principal, sea (0, *b*).



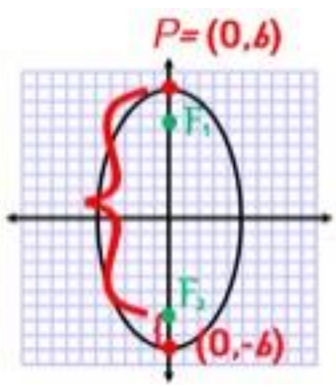


Figura 4 *Figura 5*

Así que la constante que estamos tratando de determinar es igual a la suma de la distancia desde (0, *b*) a F_1 más la distancia desde (0, *b*) hasta F_2 (véase Figura 4). A continuación, usando la simetría de los focos al origen, la constante es también la suma de la distancia de (0, -*b*) a F_2 más la distancia de (0, *b*) a F_2 (véase Figura 5), la cual es la longitud del eje principal, 2*b* (véase la Figura 1).

Lista de ejercicios 2

1. Para cada una de las siguientes elipses, indique la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse hasta los focos.

a. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{400}=1$

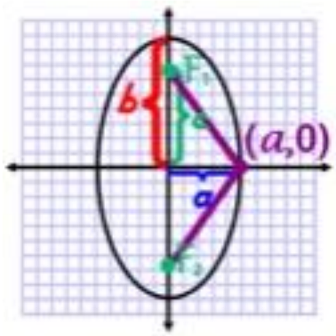
la suma es ___________

b. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

la suma es ____________

2. Considere la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{625}=1$. Si la distancia de un punto (*x*, *y*) en la elipse a uno de los focos es de 13 unidades, ¿cuál es la distancia desde ese punto hasta el otro foco?

Ahora, como sabemos que la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse hasta el foco es 2*b* (cuando el eje principal es vertical), entonces también es cierto para un punto en particular como (*a*, 0) (véase Figura 6). Por lo tanto, utilizando la simetría de la elipse, tenemos que la distancia de un foco a (*a*, 0) es *b*.



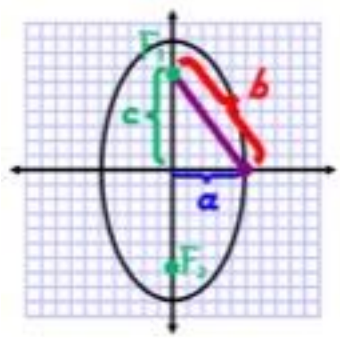


Figura 6 *Figura 7*

En consecuencia, usando el teorema de Pitágoras, encontramos que $c^2 + a^2 = b^2$ y $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.
Por lo tanto, la elipse general, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con eje principal en la dirección vertical, tiene eje principal de longitud 2*b*, eje menor de longitud 2*a*, y la distancia desde un foco hasta el centro de la elipse es $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Por lo tanto, las coordenadas de los focos son (0, *c*) y (0, -*c*).

Lista de ejercicios 3

1. Dé las coordenadas de los focos de cada una de las siguientes elipses.

a. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ b. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$ c. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{50} = 1$

2. ¿Cuál es la fórmula para *c*, la distancia desde un foco hasta el centro de la elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con eje principal en la dirección horizontal?

Aplicación de Elipses a las Casas Bote Rapanui (Hare Paenga):

Si las formas de las casas bote Rapanui fueran elipses, entonces la fundación podría haber sido establecida de la siguiente manera. Ponga dos postes en el suelo a lo largo del eje más largo deseado de la casa, espaciado uniformemente desde el centro de la casa. Ate los extremos de una cuerda a cada poste para que la longitud de la cuerda cuando se tensa sea igual a la longitud deseada de la casa. Usando un poste corto o una herramienta con un extremo afilado, tire de la cuerda tensa y trace una elipse en el suelo.

Para describir algebraicamente una base de casa bote, se podría medir a través de los puntos más anchos en cada una de las dos direcciones perpendiculares de la base, y luego sustituir estas longitudes por *a* y *b* usando la ecuación de una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Por ejemplo, si la longitud de una base era de 26 pies y el ancho de 10 pies, entonces la ecuación sería $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{13^2}=1$ ó $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$. Sea *c* la distancia desde el centro de la elipse (en nuestro caso el origen) a un foco de la elipse, entonces $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Como *b* es el eje principal, b^2-a^2 será un valor positivo. Para nuestro ejemplo, $c^2=b^2-a^2=13^2-5^2=169-25=144$. Entonces, *c* mide 12 pies. Así, el cimiento podría haberse trazado utilizando postes separados por 2*c* = 24 pies, utilizando una cuerda que, tras estar atada a los dos postes, tenía un largo de 2*b* = 26 pies. Por lo tanto, al estirar la cuerda a lo largo del eje de los dos postes, se habría extendido 1 pie más allá del poste más cercano.

Lista de ejercicios 4

1. Encuentre la ecuación de la elipse, centrada en el origen y el eje principal vertical, con los siguientes ejes mayores y menores. (Las medidas han sido tomadas de las ruinas arqueológicas reales de Rapa Nui de hare paenga.)

a. eje mayor = 30 pies
    eje menor = 5 pies

b. eje mayor = 46 pies
    eje menor = 6 pies

2. Para cada una de las elipses en el ejercicio 1 anterior, determinar las coordenadas (usar 2 decimales) de los focos, donde se colocarían los postes.

a.

b.

3. Para cada una de las elipses en el ejercicio 1 anterior, determinar hasta qué punto (a la pulgada más cercana) la cuerda se extendería más allá de cada polo.

a. ______ pulgadas

b. _____ pulgadas

Soluciones de los ejercicios

Lista de ejercicios 1

1. D, A, C, B
2. a. b = 15 y a = 4 entonces $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{225}=1$, b. b = 20 y a = 5 entonces $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{400}=1$
3. a. eje principal = 5 unidades, eje menor = 2 unidades, horizontal

   b. eje principal = 20 unidades, eje menor = 4 unidades, vertical

Lista de ejercicios 2

1. a. Como que b = 20, la suma es 2b = 40. b. Como b = 5, la suma es 2b = 10.

2. Como b = 25, la suma es 2b = 50. Por lo tanto, la longitud restante es 50 – 13 = 37 unidades.

Lista de ejercicios 3

1. a. $c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$, por lo que los focos son $(0,3)$ y $(0,-3)$.

B. $c=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$, por lo que los focos son $(0,12)$ y $(0,-12)$.

c. $c=\sqrt{50-18}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, por lo que los focos son $\left(0,4\sqrt{2}\right)$ y $\left(0,-4\sqrt{2}\right)$.

2. $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Conjunto de ejercicios 4

1. a. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{900}=1$, b. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{2116}=1$

2. a. $c=\sqrt{900-25}=\sqrt{875}\approx 29.85$, por lo que los focos son $(0,29.58)$ y $(0,-29.58)$.

B. $c=\sqrt{2116-36}=\sqrt{2080}\approx 45.61$, por lo que los focos son $(0,45.61)$ y $(0,-45.61)$.

3. a. $b-c\approx 30-29.58=0.42$ feet ≈ 5 inches

   B. $b-c\approx 46-45.61=0.39$ feet ≈ 5 inches