Mémoire sur les fonctions discontinues.

Libri, Guillaume

in: Journal für die reine und angewandte Mathematik | Journal für die reine und angewandte Mathematik | Article

303 - 316

26.

Mémoire sur les fonctions discontinues.

(Par Mr. *Guillaume Libri* de Florence.)

(Lu à l'Académie Royale des sciences de Paris, le 21. Mai 1832.)

Introduction.

Il y a quelques années que dans un mémoire où je discutais les valeurs des limites des fonctions discontinues, j'exposai une manière fort simple de représenter ces fonctions par des exponentielles sans intégrales définies ni suites infinies. J'assurai à cette occasion, que mes formules pouvaient s'appliquer avec succès aux transcendantes numériques, et spécialement à la recherche directe d'un nombre premier plus grand qu'une limite donnée.

Les géomètres qui tentèrent les premiers d'exprimer les fonctions discontinues en analyse, rencontrèrent de grands obstacles et de puissans antagonistes. Cette question agitée d'abord entre Daniel Bernoulli, Euler et D'Alembert, a occupé successivement les plus celèbres géomètres, mais ce n'est que dans ces derniers tems qu'elle a reçu une solution adoptée généralement par les analystes. Les travaux de Fourier et les belles recherches de Mr. Poisson sur les limites des fonctions discontinues, ont dû dissiper les doutes qui restaient encore sur la nature de ces fonctions.

Dans ce mémoire j'ai tâché de réduire à l'algèbre ordinaire et aux fontions exponentielles, les fonctions discontinues qui paraissaient placées aux limites les plus reculées de la science. Non seulement cette manière élémentaire de traiter des questions difficiles, sert à propager des connaissances qui étaient réservées à un petit nombre de personnes, mais elle conduit aussi à la résolution algébrique d'un grand nombre de problèmes qui paraissaient excéder les forces de l'analyse. Déjà dans ce mémoire j'applique mes principes à la détermination directe et générale des diviseurs des nombres, et à la recherche des nombres premiers. Mais ces formules sont d'un usage beaucoup plus étendu. Les géomètres qui auront bien saisi l'esprit de ma méthode verront qu'elle peut s'appliquer à une multitude de questions diverses. Elle sert surtout à la recherche du terme général de certaines séries qui paraissaient n'obéir à aucune loi analytique.

Mes expressions s'éloignent tellement des formes analytiques ordinaires, elles paraitront, peut être, si singulières au lecteur, que j'ai cru devoir insister spécialement sur leur démonstration. On trouvera au commencement de ce mémoire une discussion fort longue des valeurs de la fonction 0^x. J'aurais pu, peut être, m'en rapporter à ce qui se trouvait déjà dans d'autres ouvrages, mais j'ai tâché de combattre d'avance les difficultés que ce genre d'expression auroit pu faire naître dans l'esprit du lecteur.

La fonction $\frac{1}{0^x+1}$, dont je me sers dans ce mémoire, est beaucoup plus simple que celle dont je m'étais servi précédemment. Elle a de plus l'avantage de pouvoir s'appliquer à la théorie des nombres, de manière à éviter la valeur de 0^0. Alors elle devient évidente par elle même, indépendamment de toute considération étrangère.

Ces formules ne renferment aucune notation nouvelle. Elles sont le résultat nécessaire des propriétés connues des fonctions exponentielles. Les fonctions discontinues n'avaient été appliquées jusqu'ici qu'aux problèmes de physique mathématique. A l'avenir elles contribueront surtout aux progrès de l'analyse algébrique et à l'application de l'algèbre à la géométrie.

Analyse.

Dans nos recherches précédentes sur les fonctions discontinues nous avons considéré la valeur de 0^0 comme étant toujours égale à l'unité, en coséquence de la valeur de $x \log 0$, qui était toujours égale à zéro, lorsque $x = 0$. Mais il faut observer qu'on sait seulement que le produit $x \log x$ est égal à zéro lorsque $x = 0$; tandisque on ignore si dans $x \log 0$, le 0 du $\log 0$ vient de $\log x$, dans lequel on ait fait $x = 0$, ou de toute autre fonction de x sous le signe logarithmique. Il résulte de là quelque incertitude dans la valeur de $x \log 0$, lorsque $x = 0$, et par suite dans celle de $0^0 = 1$. Mais il est aisé de prouver directement par d'autres moyens que l'expression 0^0 a toujours pour valeur l'unité.

Mascheroni *) avait déjà observé que $0^0 = 1$. Il trouvait cette valeur par l'équation

$$0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1;$$

mais on peut y parvenir par d'autres voies.

On sait que lorsque x est un nombre entier, le développement du binome

$$(1-u)^x = 1 - xu + \frac{x(x-1)u^2}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)u^3}{2.3} + \text{etc.},$$

s'arrête toujours et donne toujours une valeur exacte quelleque soit la valeur de u; ce qui ne tient pas à la convergence de la série du second membre (car cette convergence exige que l'on ait $u < 1$), mais au facteur $x - x$, qu'on retrouve dans tous les termes après le terme $x+1^{\text{me}}$. Il résulte de là que si l'on fait $x = 0$, tous les termes, excepté le premier, se détruiront, et on aura toujours $(1-u)^0 = 1$. On voit que cette valeur est indépendante de la valeur de u, et qu'on pourra faire $u = 1$, d'où il résultera $(1-1)^0 = 1 = 0^0$. On voit aussi que l'on parviendrait au même résultat, en fesant d'abord

$$(a-b)^x = a^x - x a^{x-1} b + \frac{x(x-1)}{2} a^{x-2} b^2 - \text{etc.}$$

et puis (par la supposition de $x = 0$), $(a-b)^0 = a^0 = 1$: car puisque ce dernier résultat est indépendant de a et de b, on pourra faire $a = b$, et on aura encore

$$(a-a)^0 = 0^0 = 1.$$

Il est clair que lorsque x est une quantité positive quelconque, la fonction 0^x est toujours égale à zéro. Ceci n'a pas besoin d'être démontré; mais si on voulait voir, comment la quantité 0^x, qui est égale à *l'unité* lorsque $x = 0$, devient égale à *zéro* pour une valeur quelconque de x très peu différente de zéro, on n'aurait qu'à faire x infiniment petit dans l'équation

$$(1-1)^x = 1 - x + \frac{x(x-1)}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} + \text{etc.};$$

ce qui donnerait, en negligeant les puissances supérieures de x:

$$\begin{aligned}(1-1)^x &= 1 - x(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \ldots + \text{etc.}) \\ &= 1 - x\log(1-1) = 1 - x\log 0.\end{aligned}$$

Maintenant on sait que lorsque $x = 0$, le produit $x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \text{etc.})$

---

*) Euleri *institutiones calculi differentialis. Ticini* 1787. 4°. *pars II.* p. 813. 814.

est égal à zéro, quoique le second facteur soit une quantité infinie; il résulte de là que si on fait x égal à une quantité très-petite (mais plus grande que zéro) la valeur de ce produirt sera égale à l'unité, et alors on aura

$$(1-1)^x = 1 - x(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots + \text{etc.}) = 1 - 1 = 0.$$

Il résulte de là qu'en général la fonction 0^x aura pour valeur *zéro, l'unité*, ou *l'infini*, selon que x aura une valeur *positive*, *zéro* ou *négative.*

Puisque la fonction 0^x ne sauroit avoir que l'une de ces trois valeurs

$$0,\ 1,\ \infty,$$

il est clair que la fonction 0^{0^x} ne peut prendre que l'une des trois valeurs suivantes:

$$0^0,\ 0^1,\ 0^\infty,$$

qui donnent

$$0^0 = 1,\ 0^1 = 0,\ 0^\infty = 0.$$

Il résulte de là que la fonction 0^{0^x} est égale à zéro pour la valeur $x = 0$, et pour une valeur négative quelconque de x; et que $0^{0^x} = 1$, pour toutes les valeurs positives de x.

Maintenant la fonction

$$z = 0^{0^x}\, 0^{0^{a-x}},$$

a pour valeur l'unité pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$, et $x = a$; cette fonction se réduit à zéro pour toutes les autres valeurs de x. Car le premier facteur 0^{0^x} est égal à zéro depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -\infty$, et donne toujours $0^{0^x} = 1$, pour toute valeur positive de x. Le second facteur $0^{0^{a-x}}$ est égal à zéro depuis $x = a$ jusqu'à $x = \infty$, et donne $0^{0^{a-x}} = 1$, pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = a$, $x = -\infty$. Partant, puisque pour toutes les valeurs de x, comprises entre $x = a$, $x = \infty$; et entre $x = 0$, $x = -\infty$, l'un des deux facteurs de z est égal à zéro; et que entre $x = 0$, $x = a$, ils sont tous les deux égaux à l'unité; il en résulte enfin que le produit $0^{0^x}\, 0^{0^{a-x}}$ a pour valeur l'unité entre $x = 0$, $x = a$, et que hors de ces limites on a toujours $0^{0^x}\, 0^{0^{a-x}} = 0$. En observant que pour $x = 0$, et $x = a$, on oura toujours $0^{0^x}\, 0^{0^{a-x}} = 0$.

Il faut remarquer ici, qu'étant donnée une fonction discontinue quelconque, on pourra toujours la considérer comme étant égale à la somme d'un nombre donné de fonctions, qui resteront continues entre des limites données. Ces limites seront déterminés par les points où il y a solution de continuité dans la fonction discontinue donnée. Maintenant, chacune des fonctions continues partielles, dont la fonction discontinue totale se compose, pourra être representée par le produit de deux facteurs, dont l'un exprimera la valeur de la fonction discontinue entre deux limites de discontinuité, et l'autre exprimera la loi de discontinuité: pourvu que l'on ait toujours égard à la valeur de ces fonctions aux limites et à d'autres circonstances qui tiennent aux valeurs infinies des fonctions dont on ne considère qu'une partie.

La fonction $0^{0^{\varphi(x)}}$ devient zéro pour chaque valeur de $\varphi(x) = 0$, de manière que si on voulait exprimer de cette manière le contour d'un polygone, il est clair qu'en employant des facteurs de la forme $0^{0^x} 0^{0^{a-x}} (Ax+B)$ pour représenter chaque côté, on aura pour chaque sommet une valeur de l'ordonnée égal à zéro, ce qui serait inexact. Mais il est facile dans chaque cas de corriger cette erreur. Pour fixer les idées nous allons prendre un exemple. Supposons qu'on doive trouver l'équation de la ligne $abcd\ldots$, (Taf. V. Fig. 2.) telle que ac soit une ligne droite, et $cd\ldots$ une parabole. Soit he l'axe des ordonnées et eg l'axe des abscisses, soit $ef = n$, et exprimons en général par $y = Ax+B$, l'équation de la droite abc, et par $y = \sqrt{(Cx+D)}$ l'équation de la parabole cd. Il s'agit de trouver une fonction de x telle que depuis $x = -\infty$, jusqu'à $x = n$, elle devienne $Ax+B$, et que depuis $x = n$ jusqu'à $x = \infty$, elle devienne $\sqrt{(Cx+D)}$. Il est clair qu'en appellant $f(x)$ cette fonction inconnue, on pourra faire $f(x) = F(x) + \psi(x)$, pourvu que $F(x)$ soit égale à $Ax+B$ depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = n$, et s'évanouisse depuis $x = n$ jusqu'à $x = \infty$; et pourvu que $\psi(x)$ soit égale à $\sqrt{(Cx+D)}$ depuis $x = n$ jusqu'à $x = \infty$, et s'évanouisse depuis $x = n$ jusqu'à $x = -\infty$. Maintenant les fonctions $F(x)$ et $\psi(x)$ restent continues entre les limites $x = -\infty$, $x = n$; $x = n$, $x = \infty$: donc il faudra les décomposer en deux facteurs dont l'un exprime la condition de discontinuité, et l'autre la valeur numérique de la fonction. On voit que si on multiplie $Ax+B$ par une fonction $\varphi(x)$ telle qu'elle soit égale à l'unité depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = n$, et qu'elle devienne zéro depuis $x = n$ jusqu'à $x = \infty$, on aura d'abord la droite abc, et puis une valeur $y = 0$ pour toutes les autres valeurs de x: de même si on multiplie $\sqrt{(Cx+D)}$ par une fonction $\varphi_1(x)$ telle qu'elle soit égale à l'unité depuis $x=n$ jusqu'à $x=\infty$, et qu'elle s'évanouisse depuis $x=n$ jusqu'à $x=-\infty$, on aura la parabole cd et puis une valeur de $y=0$ pour toutes les autres valeurs de x. Et comme ces valeurs de $y=0$ n'ajoutent rien à la valeur des ordonnées, on aura enfin

$$f(x)=F(x)+\psi(z)=\varphi(x)(Ax+B)+\varphi_1(x)\sqrt{(Cx+D)}.$$

Mais on a vu qu'on pouvait faire

$$\varphi_1(x)=0^{0^{x-n}};\ \varphi(x)=0^{0^{n-x}},$$

d'où il résulte enfin, que la fonction cherchée $f(x)$ est donnée par l'équation

$$f(x)=0^{0^{n-x}}(Ax+B)+0^{0^{x-n}}\sqrt{(Cx+D)}.$$

Il faut observer cependant que pour la valeur $x=n$, au lieu d'obtenir, comme on le devrait, $f(n)=An+B$, on trouve $f(n)=0$, parceque $0^{0^{n-x}}$ et $0^{0^{x-n}}$ sont toutes deux égales à zéro l'orsqu'on fait $x=n$: cependant on aura une valeur exacte même pour cette limite $x=n$, en prenant pour $\varphi(x)$ la valeur $1-0^{0^{x-n}}$; car cette fonction donnera alors $\varphi(x)=1$, pour toutes les valeurs comprises entre $x=n$, $x=-\infty$ (en y comprenant la valeur $x=n$), et se réduira à zéro pour toutes les valeurs comprises entre $x=n$, $x=\infty$. Ainsi on aura

$$f(x)=\left(1-0^{0^{x-n}}\right)(Ax+B)+0^{0^{x-n}}\sqrt{(Cx+D)};$$

et l'équation

$$y=\left(1-0^{0^{x-n}}\right)(Ax+B)+0^{0^{x-n}}\sqrt{(Cx+D)}$$

sera l'équation de la courbe $abcd\ldots.$ qui est composée de la ligne droite abc et de l'arc de parabole $cd\ldots.$

Toute la question consiste à trouver une fonction $F(x)$ telle qu'elle ait la valeur 1 entre les limites $x=0$, $x=a$, et s'évanouisse entre $x=0$, $x=-\infty$, et entre $x=a$, $x=\infty$: car en multipliant $F(x)$ par la fonction $\psi(x)$ qui exprime la valeur de la fonction discontinue entre les deux limites $x=a$, $x=0$, on aura $F(x)\,\psi(x)$, qui représentera une partie de la fonction discontinue entre les deux limites $x=0$, $x=a$, qu'on peut supposer être deux points où la fonction totale cesse d'être représentée par la fonction $\psi(x)$; ou en d'autres termes, être deux *points successifs de discontinuité*. On peut trouver plusieurs valeurs de la fonction $F(x)$, et ces valeurs diffèrent aux limites: ainsi la fonction

$$F(x)=0^{0^x}.0^{0^{a-x}}$$

donne $F(x) = 0$, pour $x = 0$, et pour $x = a$. La fonction

$$F(x) = \left(1 - 0^{0^{-x}}\right)\left(1 - 0^{0^{x-a}}\right)$$

donne $F(x) = 1$, pour les limites $x = 0$, $x = a$; la valeur

$$F(x) = \left(1 - 0^{0^{-x}}\right) 0^{0^{a-x}}$$

donne $F(x) = 1$, pour $x = 0$, et $F(x) = 0$, pour $x = a$. Enfin la valeur

$$F(x) = \frac{1}{(0^x + 1)(0^{a-x} + 1)} \text{ donne } F(x) = \tfrac{1}{2},$$

pour $x = 0$ et pour $x = a$; en observant toujours que toutes ces valeurs de $F(x)$ donnent $F(x) = 0$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -\infty$, et depuis $x = a$ jusqu'à $x = \infty$: et qu'on a $F(x) = 1$ entre les limites $x = 0$, $x = a$: indépendamment des valeurs des limites que nous avons déjà déterminées.

Au reste ces diverses expressions peuvent être considérées comme étant les limites d'autres fonctions dans lesquelles le *zéro* est remplacé par une quantité très petite. Si l'on exprime par d une quantité très petite, la fontion 0^x sera la limite de la fonction d^x; et celle-ci aura une valeur très petite ou très grande selon que x est positif ou négatif. Lorsque $x = 0$, on aura $d^x = 1$. On voit de même que la fonction 0^{0^x} est la limite de d^{d^x}, et que $\frac{1}{0^x + 1}$ est la limite de la fonction $\frac{1}{d^x + 1}$: en supposant toujours que d est une quantité très petite.

Les fonctions que nous venons de considérer jouissent de plusieurs propriétés remarquables. Elles servent à transformer en fonctions exponentielles un grand nombre d'intégrales définies qu'on croyait irréductibles. Ainsi l'on a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dq \cos qx}{1 + q^2} = e^x . 0^{0^{-x}} + e^{-x}\left(1 - 0^{0^{-x}}\right) = \frac{e^x}{0^{-x} + 1} + \frac{e^{-x}}{0^x + 1},$$

d'où l'on déduit ce rapport assez singulier:

$$\begin{aligned}\left(e^x . 0^{0^{-x}} + e^{-x}\left(1 - 0^{0^{-x}}\right)\right)^n &= \left(\frac{e^x}{0^{-x} + 1} + \frac{e^{-x}}{0^x + 1}\right)^n \\ &= e^{nx} . 0^{0^{-x}} + e^{-nx}\left(1 - 0^{0^{-x}}\right) \\ &= \frac{e^{nx}}{0^{-x} + 1} + \frac{e^{-nx}}{0^x + 1}.\end{aligned}$$

On voit par la formule précédente, que nos expressions s'appliquent à la theorie mathématique de la chaleur et qu'elles simplifient beaucoup l'expression de certaines fonctions, qu'on ne savait représenter que par des intégrales définies. Les formules qu'on obtient de cette manière sont très simples, et rentrent dans l'algèbre ordinaire. Nous pensons même qui si au lieu d'exprimer les fonctions discontinues par des séries infinies ou par des intégrales définies, on les avait représentées d'abord par des fonctions du genre de celles que nous venons d'exposer, on aurait évité beaucoup de disputes et de malentendus sur les fonctions discontinues dont la marche et les propriétés ne sont, en dernière analyse pas moins évidentes que celles des fonctions les plus simples. Mais nos expressions trouveront surtout une application utile dans la théorie des nombres. Car elles donnent, sous formes finies et par des exponentielles seulement, la valeur en nombres de transcendantes numériques, dont on connaissait à peine quelques propriétés, et dont on ne pouvait avoir aucune expression générale. D'ailleurs pour simplifier la question, nous éviterons les valeurs de 0^0 que nous avons considérées au commencement de ce mémoire: ce qui rendra tout à fait élémentaires les recherches suivantes.

Il est évident que $\sqrt{0} = 0^{\frac{1}{2}} = 0$; maintenant la fonction $0^{\frac{1}{2}+x}$ (dans laquelle x doit toujours être un nombre entier) sera égale à zéro tant que x restera positif, et deviendra infinie lorsque x sera négatif. Il résulte de là que la fonction

$$\frac{1}{0^{\frac{1}{2}+x}+1},$$

sera égale à l'unité tant que x restera entier et positif, et deviendra égale à zéro lorsque x sera un nombre entier négatif.

On sait que la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, sera égale à n ou à zéro, selon que le nombre $\frac{m}{n}$ sera un nombre entier ou une fraction. Maintenant si on divise l'équation proposée par $x-1$, on aura

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} \ldots . + x + 1 = 0,$$

et il est clair qu'en exprimant par P_m la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation $X = 0$, on aura $1 + P_m = n$, lorsque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier, et $1 + P_m = 0$, dans le cas contraire. Il s'agit maintenant d'exprimer P_m généralement en fonctions des coefficiens de l'équation $X = 0$.

Nous avons démontré ailleurs *) qu'étant donnée l'équation

$$X_1 = x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} \ldots . - a_n = 0,$$

*) Mémoires de mathématiques et de physique, tome I. p. 11.

si on exprime par S_m la somme des puissances m^{mes} de ses racines, on aura

$$(A.)\quad S_m = m\,a_m + (m-1)\,a_{m-1}(a_1) + (m-2)\,a_{m-2}(a_2 + a_1(a_1)) +$$
$$(m-3)\,a_{m-3}[a_3 + a_2 a_1 + a_1(a_2 + a_1(a_1))] \ldots . + (m-t)\,a_{m-t}A_t + \text{etc.};$$

dans laquelle la loi de la formation des termes est manifeste, car le coefficient A_t se forme en changeant m en t dans tous les termes qui précèdent $(m-t)\,a_{m-t}A_t$, et en égalant à l'unité (dans tous ces mêmes termes) les coefficiens numériques m, $m-1$, $m-2$, etc.

Pour appliquer cette formule avec succès dans les cas particuliers, il faut que les coefficiens a_1, a_2, a_3, etc. soient donnés en fonction des exposans des puissances de x qu'ils multiplient dans l'équation $X_1 = 0$. Cela est nécessaire surtout pour savoir *à priori* quels sont les termes de cette expression qui doivent s'évanouir, lorsque m étant plus grand que n, on aurait des termes de la forme a_m, a_{m-1}, etc. qui manquent tous dans l'équation $X_1 = 0$. Ainsi par exemple dans l'équation $X = 0$, il est clair que pour avoir la valeur de P_m, il faut exprimer la condition que les coefficiens de $X = 0$ sont tous égaux à l'unité, mais qu'il n'y en a que n: c'est-à-dire (si on compare les deux équations $X = 0$, $X_1 = 0$), que

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots . = a_n = -1;$$

et que

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} \ldots . = 0.$$

Maintenant si l'on fait en général

$$a_p = -\frac{1}{1 + 0^{n+\frac{1}{2}-p}},$$

on voit que cette valeur satisfera aux conditions énoncés précédemment, car on aura

$$a_p = -\frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-p}} = -1,$$

(tant que $n > p$, ou même lorsque $n = p$) et

$$a_p = -\frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-p}} = 0,$$

lorsque $n < p$.

Il résulte de là que

$$(B.)\quad 1+P_m = 1 - m \cdot \frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-m}} - (m-1) \cdot \frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-m+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-1}}\right)$$
$$-(m-2) \cdot \frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-m+2}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-2}} - \frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-1}}\right)\right) \ldots .$$
$$\ldots . - (m-t) \cdot \frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-m+t}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-t}} - \frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-t+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-1}}\right) - \text{etc.}\right)$$
$$\ldots . - \text{etc.}$$

et le second membre de cette équation sera égal à zéro où à n, selon que $\frac{m}{n}$ sera une fraction irréductible, ou un nombre entier.

Ce second membre est évidemment une fonction de m et de n; si on le représente, pour abréger, par $f(m, n)$, il est clair que la somme des diviseurs de m compris dans la série des nombres

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots.\ a+b,$$

sera donnée par la suite

$$F(m,a)+F(m,a+1)+F(m,a+2)\ldots.+F(m,a+b) = \sum_{x=a}^{x=a+b+1} F(m,x).$$

Cette suite contient $b+1$ séries semblables entre elles et peut s'écrire de cette manière:

$$\left.\begin{array}{l}
1-m.\dfrac{1}{1+0^{a+\frac{1}{2}-m}} \quad -(m-1).\dfrac{1}{1+0^{a+\frac{1}{2}-m+1}} \quad \left(\dfrac{-1}{1+0^{a+\frac{1}{2}-1}}\right) \quad -\text{etc.} \\
+1-m.\dfrac{1}{1+0^{a+1+\frac{1}{2}-m}}-(m-1).\dfrac{1}{1+0^{a+1+\frac{1}{2}-m+1}}\left(\dfrac{-1}{1+0^{a+1+\frac{1}{2}-1}}\right)-\text{etc.} \\
\cdot\ \cdot \\
+1-m.\dfrac{1}{1+0^{a+b+\frac{1}{2}-m}}-(m-1).\dfrac{1}{1+0^{a+b+\frac{1}{2}-m+1}}\left(\dfrac{-1}{1+0^{a+b+\frac{1}{2}-1}}\right)-\text{etc.}
\end{array}\right\}$$

en substituant les valeurs de $F(m, a)$, $F(m, a+1)$.... etc. en nombres. Cette dernière formule qui, quant à la forme, a quelque rapport avec l'expression de Laplace pour les nombres de Bernoulli, sert à exprimer en nombres et en termes finis, la somme des diviseurs d'un nombre quelconque qui sont compris entre deux limites données; transcendante numérique qu'on n'avait pu, jusqu'à présent, représenter d'aucune manière en termes finis. Il est clair que si au lieu de la *somme*, on cherche le *nombre* des diviseurs de m compris dans la suite

$$a,\ a+1,\ \ldots.\ a+b,$$

on aura l'expression

$$\frac{1}{a}F(m,a)+\frac{1}{a+1}F(m,a+1)\ldots.+\frac{1}{a+b}F(m,a+b) = \sum_{x=a}^{x=a+b+1}\frac{1}{x}F(m,x),$$

qu'on pourra réduire en nombres en substituant les valeurs de $F(m, a)$, $F(m, a+1)$ etc., que nous avons déjà trouvées.

Pour obtenir la somme des diviseurs du nombre entier m, qui ne surpassent pas r, on fera $a=0$, $b=r$, dans la formule $(B.)$: maintenant si on appelle $f_r(m)$ cette somme des diviseurs de m qui ne surpassent pas r, on sait que le problème de la partition des nombres peut se ramener à la détermination de $f_r(m)$. Car si l'on désigne en général par $M_s(y)$

le nombre de fois que le nombre entier y peut résulter de la somme de s termes de la série des nombres naturels

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{etc.}$$

et si l'on fait, pour abréger, $y - \quad = u$, on aura:

$$(C.)\quad M_s(y) = \frac{f_s(u)}{u} + \frac{f_s(u-1)}{u}\frac{f_s(1)}{1} + \frac{f_s(u-2)}{u}\left(\frac{f_s(2)+f_s(1)f_s(1)}{2}\right) + \text{etc.};$$

et comme $f_s(u)$ peut toujours s'exprimer en nombres en termes finis, en fesant $a = 0$, $b = s$ dans la formule $(C.)$; le second membre de l'équation précédente sera tout connu, et on aura, par conséquent, l'expression générale de $M_s(y)$: ce qui résout généralement le problème de la partition des nombres, qu'on ne savait résoudre jusqu'à présent que dans les cas particuliers, lorsque y et s étaient donnés en nombres.

On sait, par le théorème de **Wilson**, que le produit

$$1.2.3.4\ldots.(x-1)+1 = f(x),$$

sera divisible par x lorsque x est nombre premier; et que cette division ne pourra pas s'éffectuer dans le cas contraire. Il résulte de là que si l'on fait $m = f(x)$, $n = x$, dans la formule $(B.)$, on aura:

$$1 - f(x).\frac{1}{1+0^{x+\frac{1}{2}-f(x)}} - (f(x)-1).\frac{1}{1+0^{x+\frac{1}{2}-f(x)+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{x+\frac{1}{2}-1}}\right)$$
$$-(f(x)-2).\frac{1}{1+0^{x+\frac{1}{2}-f(x)+2}}\left(\frac{-1}{1+0^{x+\frac{1}{2}-2}} - \frac{1}{1+0^{x+\frac{1}{2}-1}}\left(\frac{-1}{1+0^{x+\frac{1}{2}-1}}\right)\right) - \text{etc.},$$

et cette expression aura pour valeur x, ou *zéro*, selon que $\frac{f(x)}{x}$ est un nombre entier ou fractionnaire; ou bien (ce qui est la même chose) selon que x est un nombre premier, ou un nombre composé. Il résulte de là, que la somme des nombres premiers contenus dans la suite de nombres

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots.\ a+b,$$

sera donnée par la formule:

$$(D.)\quad \left.\begin{array}{l}
1 - f(a).\dfrac{1}{1+0^{a+\frac{1}{2}-f(a)}} - (f(a)-1).\dfrac{1}{1+0^{a+\frac{1}{2}-f(a)+1}}\left(\dfrac{-1}{1+0^{a+\frac{1}{2}-1}}\right) - \text{etc.} \\
+1 - f(a+1).\dfrac{1}{1+0^{a+1+\frac{1}{2}-f(a+1)}} - (f(a+1)-1).\dfrac{1}{1+0^{a+1+\frac{1}{2}-f(a+1)+1}}\left(\dfrac{-1}{1+0^{a+1+\frac{1}{2}-1}}\right) - \text{etc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+1 - f(a+b).\dfrac{1}{1+0^{a+b+\frac{1}{2}-f(a+b)}} - (f(a+b)-1).\dfrac{1}{1+0^{a+b+\frac{1}{2}-f(a+b)+1}}\left(\dfrac{-1}{1+0^{a+b+\frac{1}{2}-1}}\right) - \text{etc.}
\end{array}\right\}$$

qui est composée d'un nombre fini de termes; car chaque série partielle s'arrête nécessairement après un certain nombre de termes: puisque dans la formule $(A.)$ on s'arrête dès qu'on trouve un coefficient extérieur égal à zéro. Au reste il serait aisé de trouver une fonction discontinue telle, qu'elle exprimât la somme des nombres premiers, compris dans la suite

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots.\ a+b,$$

sans qu'il fût nécessaire d'y ajouter aucune condition: on n'aurait, pour cela, qu'à faire

$$a_p = -\left(\frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-p}}\right)\left(\frac{1}{1+0^{p+\frac{1}{2}}}\right),$$

au lieu de

$$a_p = -\frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-p}},$$

dans la formule (*A.*).

Si on voulait seulement le *nombre* des nombres premiers compris dans la série

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots.\ a+b;$$

on obtiendrait ce *nombre* en divisant par a la première ligne de la formule (*D.*); par $a+1$ la seconde, par $a+2$ la troisième: et enfin par $a+b$ la dernière.

Si l'on exprime par R_m la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation

$$x^n - y = 0,$$

il est clair qu'on aura $R_m = ny^{\frac{m}{n}}$, ou $R_m = 0$, selon que $\frac{m}{n}$ est un nombre entier ou une fraction irréductible. Il résulte de là que si l'on fait le produit

$$(x^m-y)(x^{m-1}-y)(x^{m-2}-y)\ \ldots.\ (x^2-y)(x-y) = X_1 = 0,$$

et qu'on appelle T_m la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation $X_1 = 0$, on aura

$$T_m = y^m + \frac{m}{\alpha}y^\alpha + \frac{m}{\beta}y^\beta + \frac{m}{\gamma}y^\gamma + \ldots. + my,$$

et les nombres α, β, γ, ... etc., seront tous les diviseurs de m.

Maintenant si on veut trouver un nombre premier plus grand que le nombre p, on fera (dans la valeur précédente de T_m) $m = 1.2.3\ldots$ $\ldots p+1$; et il est évident que le moindre des nombres α, β, γ .... etc. (autre que l'unité) sera un nombre premier plus grand que p.

En effectuant le produit, on trouve $\left(\text{en posant } \frac{m(m+1)}{2} = s\right)$

$$\begin{aligned} X_1 &= (x^m-y)(x^{m-1}-y)\ldots.(x-y) \\ &= x^s - yx^{s-1} - yx^{s-2} - (y-y^2)x^{s-3} - (y-y^2)x^{s-4} - (y-2y^2)x^{s-5} - \text{etc.} \\ &= x^s - a_1x^{s-1} - a_2x^{s-2} - a_3x^{s-3} - a_4x^{s-4} - a_5y^{s-5} - \text{etc.} = 0; \end{aligned}$$

et si on représente, comme nous l'avons déjà fait, par $M_t(q)$ le nombre de fois que le nombre q peut être formé par l'addition de t termes différens pris dans la série

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ q,$$

on aura en général:

$$a_r = yM_1(r) - y^2M_2(r) + y^3M_3(r) \ldots \pm y^r M_r(r);$$

et en substituant successivement les valeurs de a_1, a_2, a_3, etc. dans l'expression (A.), on trouvera généralement la valeur de T_m, et par suite on aura le plus petit des exposans α, β, γ, ... etc., qui sera un nombre entier plus grand que p.

Si l'on fait $y = 1$, dans la valeur de $X_1 = 0$, on obtiendra (comme Euler l'a démontré):

$$(x-y)(x^2-y)\ldots(x^m-y) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)\ldots(x^m-1)$$
$$= x^s - x^{s-1} - x^{s-2} + x^{s-5} + x^{s-7} \ldots \pm x^{\frac{3s^2 \pm s}{2}} \ldots \text{etc.} = 0,$$

et partant:

$$M_r(r) - M_{r-1}(r-1) + M_{r-2}(r-2) \ldots \pm M_1(r) = \pm 1, \text{ ou bien } = 0,$$

selon que r est ou n'est pas de la forme $\frac{3r^2 \pm r}{2}$. On voit dont que le problème de la *partition des nombres* peut se réduire assez simplement à une suite récurrente.

La méthode que nous venons d'exposer, conduit nécessairement à trouver un nombre premier plus grand qu'une limite donnée; mais cependant elle n'indique pas *a priori*, quel est le plus petit des diviseurs α, β, γ, etc.; et elle n'est pas, par conséquent, une formule générale. Car il faut réduire la valeur de T_m en nombres pour connaître quel est le plus petit des nombres α, β, γ, etc.; et par suite le nombre premier cherché, plus grand que p. Cependant, on peut trouver une formule générale de cette espèce, car si on fait, pour abréger, $1.2.3\ldots p+1 = m$, et qu'on exprime en général par e_n, la série

$$1 - m.\frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-m}} - (m-1).\frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-m+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-1}}\right)$$
$$-(m-2).\frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-m+2}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-2}} - \frac{1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+\frac{1}{2}-1}}\right)\right) - \text{etc.}$$

(que nous avons déjà démontré être égale à n ou à *zéro* selon que $\frac{m}{n}$ est ou n'est pas un nombre entier), il est clair que

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots\ e_m$$

exprimeront tous les diviseurs de m. Partant si l'on suppose que e_1 est le plus petit de ces diviseurs, il n'y aura que ce nombre là qui rendra positives toutes les différences

$$e_2 - e_1, \quad e_3 - e_1, \quad e_4 - e_1, \quad \ldots \quad e_m - e_1;$$

car si e_1 n'était pas le plus petit des nombres e_1, e_2, e_3, ... e_m, dans la suite des différences précédentes, il y aurait au moins une valeur négative. Il résulte de là que la fraction

$$\frac{1}{0^{\frac{1}{2}+e_2-e_1}+0^{\frac{1}{2}+e_3-e_1}+0^{\frac{1}{2}+e_4-e_1}\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_m-e_1}+0^{e_1-1-\frac{1}{2}}+1}$$

se réduira dans le dénominateur à l'unité lorsque e_1 est plus petit que tous les autres termes e_2, e_3, etc.; mais qu'elle aura au dénominateur au moins une valeur infinie dans le cas contraire; ce qui fera évanouir la fraction. Le terme $0^{e_1-1-\frac{1}{2}}$ a été introduit pour éviter les valeurs de $e_1 = 1$, $e_1 = 0$; car ce terme devient infini dans ces deux cas, et fait évanouir la fraction.

Si l'on fait maintenant toutes les combinaisons possibles, on trouvera la formule:

$$\begin{aligned}
&\frac{e_1}{0^{\frac{1}{2}+e_2-e_1}+0^{\frac{1}{2}+e_3-e_1}\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_m-e_1}+0^{e_1-1-\frac{1}{2}}+1}\\
+&\frac{e_2}{0^{\frac{1}{2}+e_1-e_2}+0^{\frac{1}{2}+e_3-e_2}\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_m-e_2}+0^{e_2-1-\frac{1}{2}}+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&\frac{e_m}{0^{\frac{1}{2}+e_1-e_m}+0^{\frac{1}{2}+e_2-e_m}\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_{m-1}-e_m}+0^{e_m-1-\frac{1}{2}}+1}
\end{aligned}$$

qui aura toujours pour valeur numérique e_1, en supposant que e_1 est le plus petit des diviseurs de m (autres que l'unité): e_1 sera toujours un nombre premier plus grand que p.

La formule que nous venons de trouver peut toujours se réduire généralement en nombres en termes finis; elle ne contient que les valeurs de p et des nombres inférieurs à p; les quantités e_1, e_2, e_3, ... e_m, sont connues et peuvent s'exprimer en nombres; nous les avons introduites dans notre formule pour en abréger et simplifier l'écriture.