Nous vous proposons de lire, en suivant l'illustration de Piero della Francesca, l'énoncé et la démonstration da la proposition I.25. Dans les points qui suivent, nous vous donnerons des suggestions pour l'interprétation de ce texte.

Proposition I.25

Début du texte 1

Voir Bibliographic References

«Plan dégradé» signifie plan en perspective.

Le carré BCED représente le plan horizontal, sur lequel sera donné le carré FGHI, que nous voulons représenter en perspective.

SUR UN PLAN DÉGRADÉ, DÉCRIRE EN SON LIEU UNE SURFACE PLANE CARRÉE DONNÉE [DE POSITION]

Soit BCED le plan dégradé et A le point [de vue] ; soient FGHI la surface donnée dans sa propre forme et BCED le plan dans lequel la surface carrée FGHI est donnée dans sa propre forme, comme cela est [dit] dans la démonstration, et d'après celle-ci, je mènerai les lignes parallèles à BC : d'abord je mènerai du point F une parallèle à BC, qui coupera la diagonale BE au point 1 ; puis j'en tirerai une du point G, qui divi-

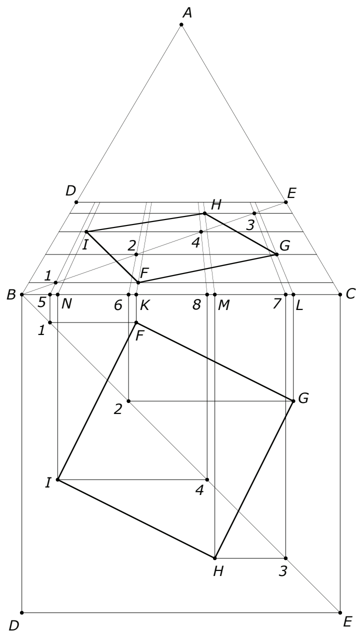
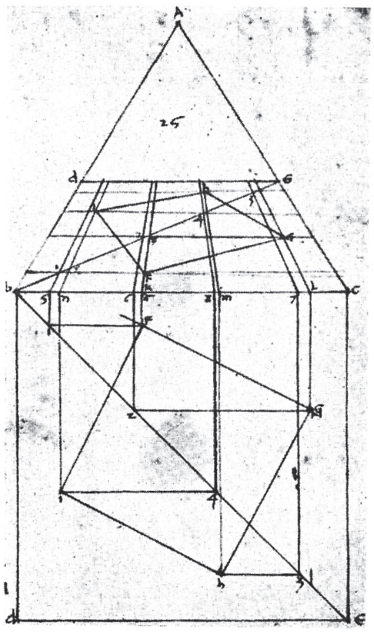


fig. 1



sera la diagonale au point 2 ; et je tirerai une parallèle à BC du point H, qui taillera la diagonale au point 3 ; puis j'en tirerai une de I, qui coupera la diagonale au point 4 ; puis je / / mènerai du point I une parallèle à BD, touchant BC au point 5 ; puis je mènerai du point 2 une parallèle à BD touchant BC au point 6, je tirerai du point 3 une parallèle à BD, touchant BC au point 7, et je mènerai du point 4 une parallèle à BD touchant BC au point 8 ; puis je tirerai du point G une parallèle à BD, touchant BC au point L, je tirerai du point F, une parallèle à BD, touchant BC au point K, et je tirerai du point H, une parallèle à BD, touchant BC au point M ; puis je tirerai du point I, une parallèle à BD, touchant BC au point N, tous points desquels je tirerai des lignes dans la surface dégradée.

D'abord je mènerai la diagonale BE, puis je tirerai une ligne du point 5 au point A, et là où elle coupera la diagonale je ferai le point 1 ; et je mènerai une ligne du point 6 au point A, et là où elle taillera la diagonale je marquerai le point 2, je tirerai une ligne du point 7 au point A, et là où elle divisera la diagonale je pointerai 3, et je tracerai une ligne du point 8 au point A, et là où elle coupera la diagonale je ferai le point 4 ; puis je tracerai les lignes passant par 1, 2, 3 et 4, toutes parallèles à BC et DE ; puis je tirerai une ligne de K au point A, et là où elle coupera la ligne passant par 1, je ferai le point F ; et je mènerai une ligne de L au point A, et là où elle divisera la ligne passant par 2, je ferai le point G ; je mènerai une ligne de M au point A, et là où elle coupera la ligne passant par 3, je marquerai le point H ; je tracerai une ligne de N au point A, et là où elle incisera la ligne passant par 4, je ferai le point I ; puis je tracerai les lignes FG, GH, HI et IF et le quadrilatère donné sera complété.

Fin du texte 1

Suggestions pour l'interprétation

1. Par le moyen de la proposition I.25, Piero donne des instructions pour la construction perspective d'un carré donné *FHGI* sur le plan horizontal (désignons -le par α). Le plan α est représenté par le carré *BCED* et les figures en perspective, c'est a dire toutes les lignes au dessus du segment *BC* de la figure 1, sont tracés sur un plan vertical π, le plan du tableau où l'artiste travaille. Néanmoins, les instructions de Piero semblent se référer à une figure entièrement plane.

Nous donnons ensuite notre interprétation de la situation, au moyen de quelques dessins en perspective cavalière et de quelques commentaires. Discutez et essayez de suivre et d'analyser cette interprétation.

Voir page 2 du document Sketchpad **Piero_fr.gsp**

Comme il est usuel chez Piero, des points distincts sont cotés avec la même lettre dans certains cas (c'est le cas de plusieurs points dans la figure finale de Piero (D, E, F, ...). Nous gardons ici, dans la figure 2a, la même convention. Le point A sur le plan π est la projection orthogonale du point de vue A(espace). Le plan π est le plan du tableau. Par moyen d'une projection centrale de centre A(espace), le carré BDEC horizontal est transformé en le trapèze BDEC sur le plan π. (note: Les figures 2a et 2b n'existent pas dans le livre de Piero).

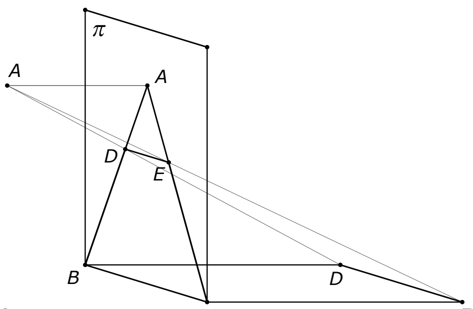


fig. 2a

Par un rabattement, ou si vous voulez une rotation de 90° autour de la droite BC, on peut faire coïncider le plan horizontal avec le plan vertical, c'est a dire le plan des figures données avec le plan où nous irons construire les figures en perspective. Nous soulignons que cette procédure revient:

- *a définir une application du carré BCED (plan α) sur le trapèze BCED (plan π);*
- *a faire coïncider les deus plans et obtenir (comme vous allez voir ensuite) une bijection entre deux ensembles du même plan;*

n'était pas connue au XV siècle.

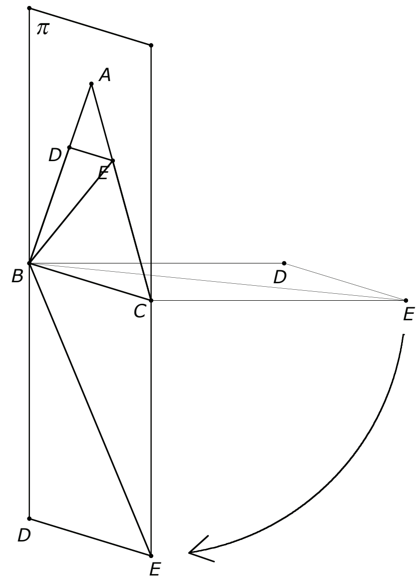


fig. 2b

Voir page 3 du document Sketchpad **Piero_fr.gsp**

Par la procédure précédente, nous obtenons la figure plane sur laquelle Piero va travailler. Le carré BCED représente le plan sur lequel sera tracé le carré FHGI. Si par exemple l'artiste est en train de peindre l'intérieur d'une maison, ce carré peut être une figure sur le pavement. Ce que Piero veut démontrer c'est comment peut on obtenir, sur le plan π du tableau, la vue en perspective de ce carré.

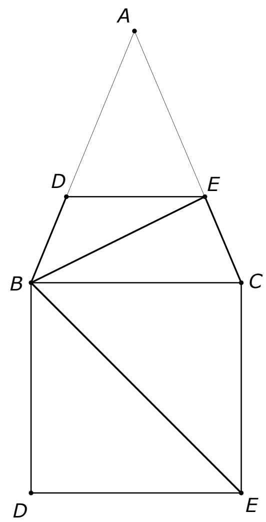


fig. 2c

2. Reprenons le texte de Piero. Après avoir placé le carré *FHGI* sur le plan horizontal, Piero donne des instructions pour déterminer les points qui, sur le plan dégradé, vont correspondre aux points *F, G, H* et *I*. Piero répète pour chaque sommet du carré la construction indiquée sur la figure 3 pour obtenir le point *P’* a partir d’un point *P* général.

Pour chaque point *P* à l’intérieur (resp. sur la frontière) du carré/plan «horizontal» *BCED* on obtient un point *P’* à l’intérieur (resp. sur la frontière) du carré/plan dégradé. Piero donne des constructions semblables pour un triangle, pour un octogone, etc.

Voir page 4 du document Sketchpad **Piero_fr.gsp**

Les étiquettes des segments *a*, *b*, *a’* et *b’*, qui n’existent pas dans les illustrations de Piero, nous suggèrent, a nous qui vivons après Descartes, que le point *P* est défini par les coordonnées (*a,b*) et qu’il est envoyé sur le point *P’*, défini par les coordonnés (*a’,b’*).

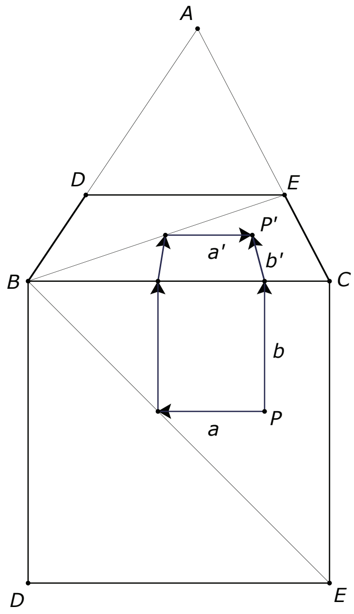


fig. 3

D’abord, essayons de comprendre ce qui a conduit Piero à la conception de cette transformation. Dans le point suivant , on vas reprendre une proposition précédente de Piero qui est certainement le point de départ pour cette découverte.

3. Voyons la proposition I.15:

UNE FOIS DÉGRADÉE UNE SURFACE CARRÉE DIVISÉE EN PLUSIEURS PARTIES ÉGALES, PRODUIRE CES DIVISIONS DANS LE CARRÉ [DÉGRADÉ).

Nous allons dessiner l’illustration de Piero fig. 4a) en deux moments (fig. 4b et fig. 4c):

Dans cette proposition, Piero prend comme point de départ la figure 2c. Il divise le carré *BCED* en «parties égales», et montre comment on obtient une division correspondante du carré dégradé: (i) construction des segments *FA*, *GA*, *HA* et *IA* et après (ii) constructions des segments parallèles à *BC* et passant par les intersections des segments précédents avec la diagonale du carré dégradé.

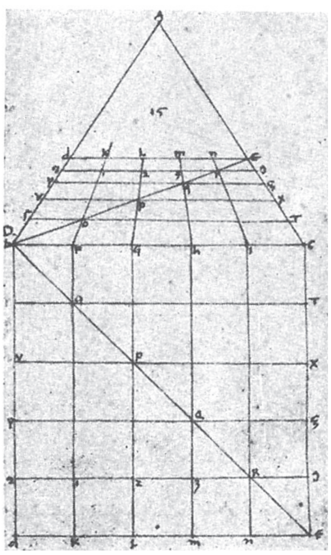


fig. 4a.
L’illustration de Piero

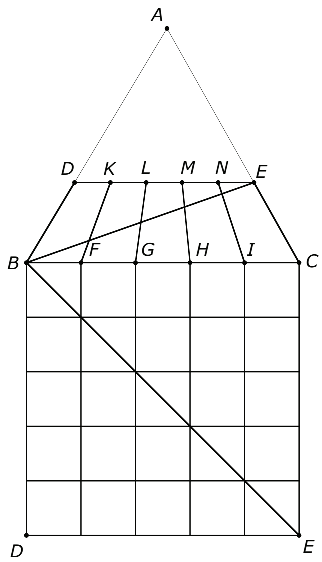


fig. 4b

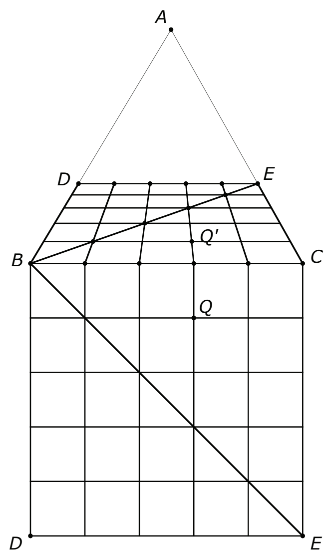


fig. 4c

De cette façon, les noeuds des deux réticulés se correspondent (comme *Q* et *Q’* dans la figure 3c). D’ici à la construction qui fait correspondre *P’* à *P* (fig. 3) il ne fallait qu’un petit pas pour Piero.

Suggestions pour le travail avec Sketchpad

1. Ce que nous allons vous proposer c'est de prolonger cette transformation de Piero à tout le plan α, en utilisant le logiciel *The Geometer's Skecthpad*.

Mais avant il faut remarquer que Piero utilise toujours sa construction pour des points *P* situés à l'intérieur ou sur la frontière du carré *BCED* que représente le plan α. Il semble à première vue que la même construction serait valable pour tous les points de α, si au préalable on remplace le segment *BC* et les deux diagonales *BE* par des droites, de façon que les intersections nécessaires à la construction existent toujours, quelle que soit la position du point *P*. Ce n'est pas le cas, comme vous allez voir d'une façon expérimentale dans ce qui va suivre.

2. *Instructions*:

Si vous n'avez aucune expérience du logiciel Sketchpad, vous pouvez consulter les pages 5 et 6 du document **Piero_fr.gsp**

a) Ouvrir le fichier Piero_fr.gsp, page 7. La page 7 est une page vide qui va vous permettre de faire quelques constructions et aussi d'utiliser les outils ***P--->P'***, ***P'--->P*** et ***LF1***.

b) Définir une droite *BC* horizontale (c'est la droite qui remplace le segment *BC* des figures précédentes)

c) Construire deux droites *t* et *t'* ayant un point commun sur la droite *BC* (ce sont les droites qui remplacent les deux diagonales)

d) Créer un point *A* (nous savons qu'il s'agit de la projection sur le plan du tableau du point de vue *A*(espace))

e) Creér un point *P* et reproduire dans cette nouvelle situation la construction de Piero pour obtenir le transformé *P'* . (Utiliser pour les droites de construction les mêmes noms que dans la figure 5)

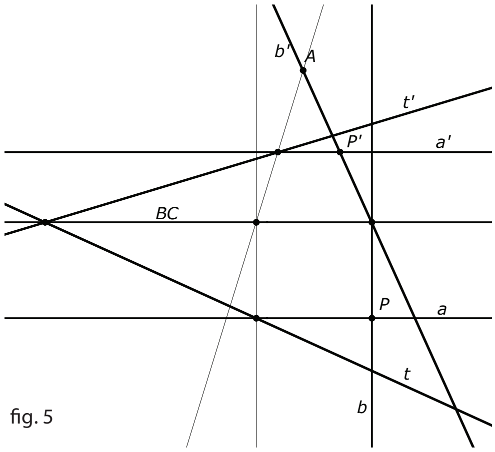


fig. 5

f) Votre figure doit être semblable à la figure 5.

L'outil P--->P' donne le point P' pour chaque point P.

Vous pouvez l'utiliser pour vérifier votre construction.

3. Le point *P'* est obtenu par l'intersection des droites *a'* et *b'*. Si vous traînez le point *P*, les droites qui sont utilisées pour construire le point *P'* changent de position et nous ne pouvons pas, sans plus, être sûrs que ses intersections existent toujours...

Poursuivons nos constructions:

a) Sélectionner toutes les droites de construction de *P'* (et aussi les points d'intersection de ces droites avec *BC*, *t* et *t'*) et utiliser la commande *hide* (*display:hide*) pour les faire disparaître. (Le point *A* doit être proche de la droite *t'*, comme dans la figure 6)

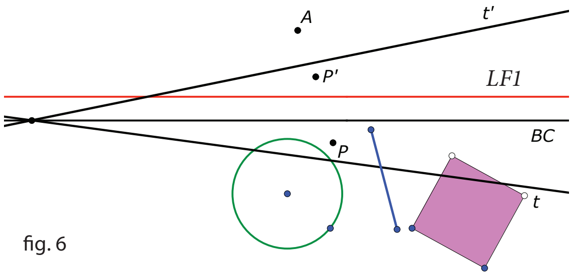


fig. 6

Pour les outils, presser le bouton du menu à gauche

b) Utiliser l'outil *LF1* pour faire apparaître une ligne rouge *LF1*.

c) Construire diverses figures – par exemple: segment, carré, cercle – au dessous de la droite *BC*. Votre figure doit être semblable à la figure 6.

d) Utiliser la procédure *merge-locus-split* (*edit:merge*, *construct:locus*, *edit:split*) pour obtenir l'image du segment par la transformation *P--->P'*.

e) Déplacer le segment de telle façon qu'il ait une intersection avec la droite *LF1*.

f) De la même façon, construire les images du carré et du cercle par la transformation *P--->P'*. Déplacer le carré de telle façon qu'il intercepte la droite *LF1*. Faire le même avec le cercle.

g) Aucune conjecture sur la droite *LF1*?

Sur la droite LF1, voir page 6 du document **Piero_fr.gsp**

4. Par la proposition I.2, Piero della Francesca (1416-1492) a définit une transformation projective plus de trois siècles avant Poncelet (1788-1867).

Nous vous proposons de lire les textes suivants, et de les interpréter en vous appuyant sur les figures de Dürer et de Dandelin, sur les notes latérales et sur le fichier Sketchpad Dürer_Dandelin_fr.gsp. Si vous connaissez déjà le programme Sketchpad (ou un autre logiciel pour la géométrie dynamique) et si vous avez un ordinateur disponible, vous pouvez essayer de reproduire les constructions de Dürer et de Dandelin. Vous pouvez aussi étudier les pages indiquées du fichier Sketchpad pour suivre une interprétation pas a pas du tracé des sections coniques.

Les sous-titres ont été ajoutés par nous.

Début du texte 1

Voir **Bibliographic References**

[Introduction]

Les Anciens ont montré qu'on peut faire trois sections différentes d'un cône qui ne donnent pas de ligne courbe identique à celle de la base du cône. Sinon, on peut aussi couper le cône par le milieu de sorte que la partie supérieure ait de nouveau la forme d'un cône. On n'en tiendra pas compte ici. Mais les trois autres sections donnent chacune une ligne particulière. Ces lignes, je vais vous apprendre à les tracer. Les érudits appelaient la première coupe *elipsis*. Elle coupe le cône obliquement et n'ampute pas sa base. Cette section oblique peut être commencée plus haut d'un côté et plus bas de l'autre de sorte qu'un côté soit plus proche de la base que l'autre. La deuxième section donne au tracé une parallèle au côté AB du cône. Les érudits l'appellent *parabola*. La troisième section, quand on la dessine, représente une verticale parallèle à la ligne issue du centre du cône et qui en rejoint le sommet A. Cette ligne, on l'appelle *hyperbola*. Je ne sais pas comment nommer ces trois coupes avec des noms allemands mais nous voulons leur donner des noms permettant de les identifier. L'*élipsis*, nous l'appellerons ligne en œuf [*Eierlinie*] parce qu'elle ressemble à peu près à un œuf. La *parabola* sera appelée ligne ardente [*Brennlinie*] parce qu'à partir d'elle il est possible de fabriquer un miroir qui met le feu. L'*hyperbola*, je vais l'appeler ligne en fourche [*Gabellinie*].

Voir, à la page 2 de ce document, la figure de Durer qui accompagne ce texte et une reproduction plus lisible.

[L'elipsis]

Maintenant, si je veux dessiner la ligne en œuf-ellipse, je dois d'abord dessiner le cône, indiquer la section et dessiner celle-ci en plan rabattu.

[Vue en elevation]

Page 1 de **Durer_Dandelin_fr.gsp**

Je ferai comme suit: on appellera *A* le sommet du cône et *BCDE* la base. J'abaisse de *A* une verticale. La ligne de coupe sera en haut *F* et en bas *G*. Cette coupe, je la partage en douze champs par onze points et je commence à numéroter à partir de *F*.

[Vue en plan rabattu]

Page 2 de **Durer_Dandelin_fr.gsp**

Au-dessous, je redessine le cône en plan rabattu. Ainsi, *A* devient le centre et *BCDE* un cercle. De même que de tous ces points et de tous les nombres compris entre *F* et *G* des verticales issues de *FG* descendent sur la base et coupent le cercle, de même, je désignerai les points d'intersection par leurs lettres et leurs chiffres.

Au lieu de faire la constructions par points (Dürer partage la ligne FG en douze champs définis para onze points numérotés) nous utiliserons un plan horizontal variable, qui remplace de façon dynamique la construction par points de Dürer, mais il s'agit exactement de la même idée.

Nous avons mis en italique une partie du texte de Dürer pour souligner sa méthode pour la constructions des arcs dont les extrémités définissent les points de la section conique. Il faut lire ce texte en s'appuyant sur l'illustration de Dürer. Comme vous pouvez voir à la page 2 du fichier Sketchpad, nous avons remplacé ces 11 arcs de cercle par un arc dynamique (couleur verte).

[Construction de la section en plan rabattu]

Maintenant que cela est fait, je prends un compas et je place dans le cône un pied sur la verticale issue de A, à hauteur du point 1 de la coupe oblique FG. À cette hauteur-là, je place l'autre pied de compas sur la ligne AD. Je conserve l'écartement et je le reporte sur le plan rabattu dessiné en dessous. Je place un pied de compas dans le centre A, l'autre sur la ligne abaissée 1 et je trace tout autour du côté de D jusqu'à la ligne 1. De nouveau je place le compas avec un pied dans le cône sur la ligne verticale A à hauteur du point 2 de la ligne FG, et l'autre pied sur la ligne AD. Je reporte le même écartement sur le plan rabattu: je place un pied de compas dans le centre A, l'autre pied sur la ligne droite 2 et je trace de nouveau un arc de cercle à partir de là, du côté de D, jusqu'à la ligne 2. Je renouvelle l'opération jusqu'au point 4. Ensuite. pour le point 5. j'utilise le compas avec un pied sur la ligne AB. Je reporte le même écartement en bas sur le plan rabattu et je trace un cercle de centre A depuis la ligne abaissée 5 du côté de D jusqu'à cette même ligne 5. Je fais de même pour tous les chiffres et je reporte tous les éléments du cône supérieur sur le plan rabattu.

Page 3 de
Durer_dandelin_fr.gsp

[Vue de la section en vraie grandeur]

Je réalise alors à partir du plan rabattu la ligne l'*ellipsis* comme suit: je dessine la longueur GF à la verticale, telle qu' elle est, séparée en douze champs égaux par onze points et je dessine onze horizontales parallèles qui passent par tous ces points. Ensuite, sur le plan rabattu, je prends la distance entre les deux points d'intersection de la ligne droite 1 et l'arc de cercle, et je la reporte sur la coupe FG. Je place cette longueur sur la ligne 1 et la pointe des deux côtés. Je fais la même chose pour tous les chiffres. Lorsque tous les points sont déterminés, je trace la ligne en œuf ou elipsis de point en point comme je l'ai dessiné ci-dessous.

Fin du texte 1

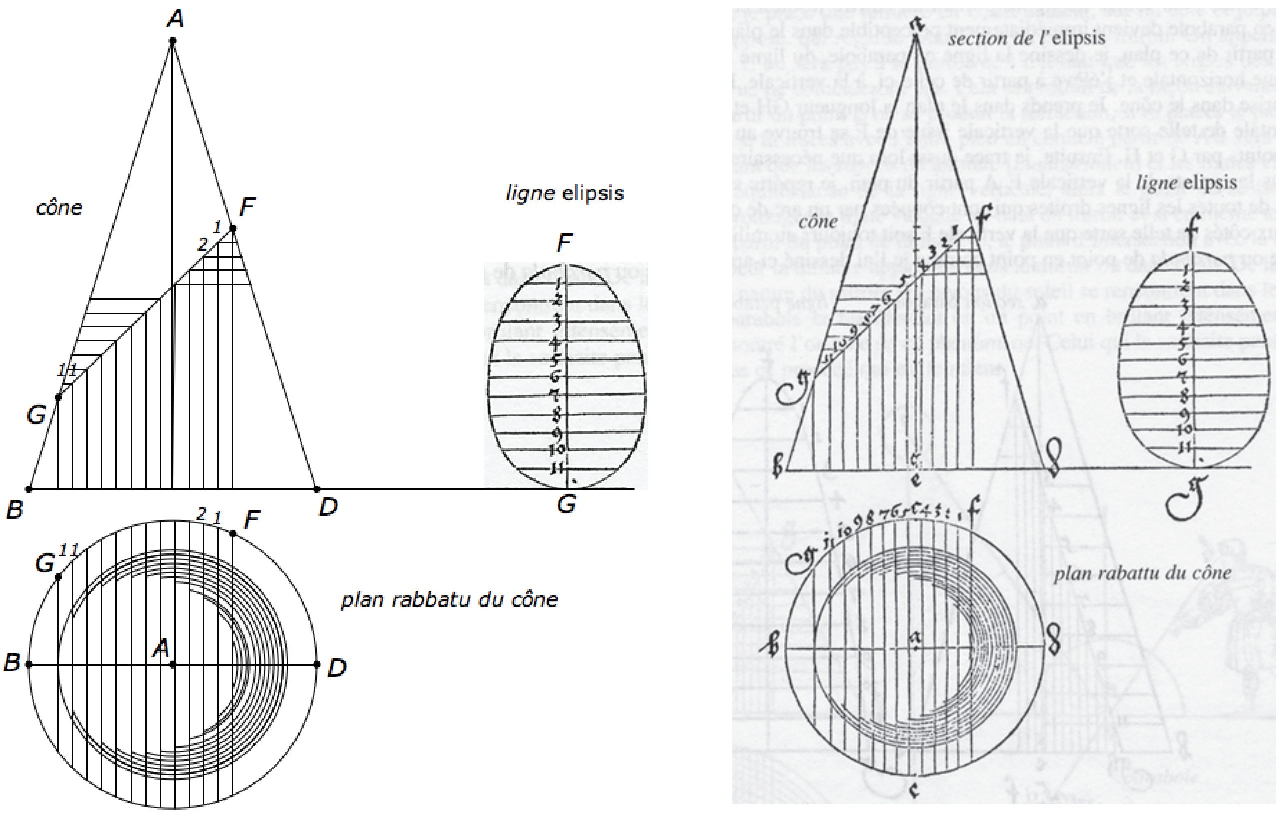


fig. 1

Le texte de Dürer décrivant la construction de l'ellipse finit ici. Ensuite, Dürer présente des textes tout à fait semblables décrivant les constructions de la parabole et de l'hyperbole.

Nous vous proposons maintenant de lire et d'interpréter un texte de Dandelin qui va nous permettre de trouver les foyers de l'ellipse construite par Dürer. Ce texte de Dandelin constitue la première partie de la "Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution et sur les hexagones de Pascal e de M. Brianchon". Dans ce petit texte, Dandelin démontre le théorème (énoncé au premier paragraphe) qui va nous permettre de trouver, dans la construction de Dürer, les foyers de l'ellipse.

[Un théorème de Dandelin]

Début du texte 2

Voir **Bibliographic References**

«Quelles que soient les positions respectives d'un cône droit et d'un plan dans l'espace, if faut toujours qu'ils se coupent quelque part; et l'on peut en général concevoir deux sphères, qui, touchant le cône dans son intérieur, touchent aussi le plan sécant: Alors les deux points de contact du plan et des sphères sont les foyers de la section conique.

Voir figure 2

Par l'axe du cône menons un plan perpendiculaire au plan de la section. Il coupera le cône suivant *AS* et *BS*, les deux sphères suivant les cercles *C* e *c* tangentes à ces deux [droites], et le plan de la section suivant la droite *Ff* tangente aux deux cercles en *F* et *f*, qui seront les points de contact des sphères et du plan de la section.

Les deux sphères toucheron le cône suivant deux cercles parallèles, perpendiculaires tous deux au plan ASB, et dont les traces sur ce plan sont ab e AB.

Tout cela posé, menons quelque part une arète ST du cône; cette arète touchera les deux sphères en t et en T sur la circonférence des cercles ATB et atb, et la distance Tt sera évidemment égale à Aa.

Cette arète coupera aussi le plan de la section en un point m, dont la projection est en m' sur la trace ou le grand axe de la section, et si on mène les droites mf, mF, eles seront tangentes l'une à la sphère C, l'autre à la sphère c; mais mt est aussi tangente à la sphère c, donc mt et mf sont égales, et par la même raison on a aussi $mT = mF$. D'où il suit que $mT + mt$ ou tT ou Aa est égal à la somme des rayons mF e mf menés des points F et f, au point m de la courbe; mais comme le point m est arbitraire et que Aa est constant, on voit que cette propriété a lieu pour tous les points de la section; ainsi cette courbe est une elipse donst les foyers sont F et f.

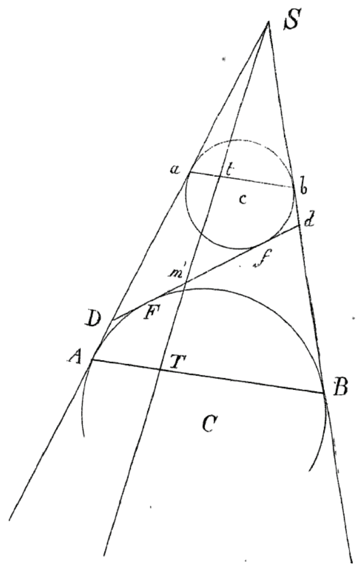


fig. 2

On démontrerait exactement de la même façon la même chose por la parabole et l'hyperbole, ainsi nous regarderons notre thèorème général comme démontré.»

Fin du texte 2

Page 4 de
Durer_dandelin_fr.gsp

Ce résultat de Dandelin nous permettra de trouver les foyers de l'ellipse construite par Dürer. Vous pouvez suivre cette construction des foyers dans le même document Sketchpad que nous venons d'utiliser.

Pour les autres sections coniques, Dürer donne des instructions entièrement analogues, accompagnées d'illustrations (figure 3). À la page 5 du fichier Sketchpad vous trouverez une vue d'ensemble des trois sections coniques.

Page 5 de
Durer_dandelin_fr.gsp

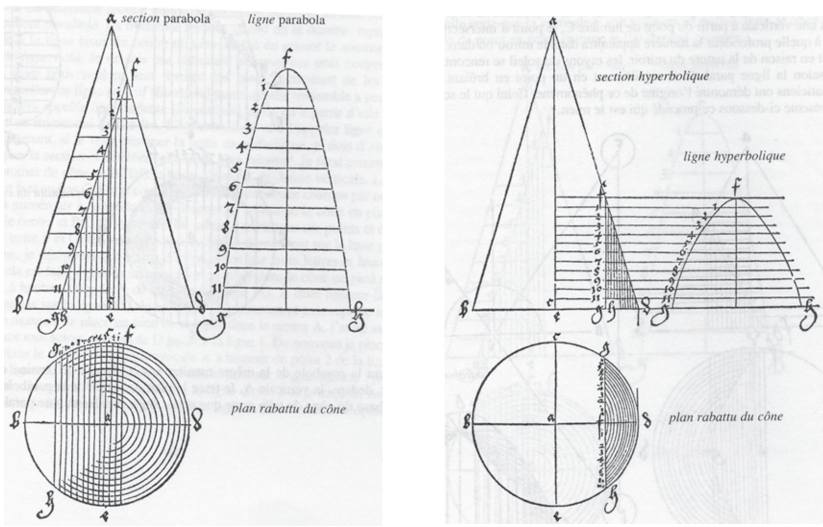


fig. 3

Nous vous proposons de lire les textes suivants, et de les interpréter en vous appuyant sur les figures de Roberval et de Descartes, sur les notes latérales et sur le fichier Sketchpad Roberval_Descartes_fr.gsp. Si vous connaissez le programme Sketchpad (ou un autre logiciel pour la géométrie dynamique) et si vous disposez d'un ordinateur, vous pouvez essayer de reproduire les constructions de Durer et de Dandelin. Vous pouvez aussi étudier les pages indiquées du fichier Sketchpad pour voir une interprétation pas a pas des textes.

Ces sous-titres sont ajoutés par nous.

[Roberval: le principe d'invention]

Problème I

Proposition cinquième

Début du texte 1

Voir Bibliographical references

Au début de l'ouvrage dont ce texte est extrait il existe l'Avertissement suivant:

«On a trouvé écrit de la main de M. de Roberval au commencement du Manuscrit d'où cet Ouvrage a été pris, que l'invention en est de lui, mais qu'il ne l'a pas mis en l'état qu'il est; que ça a été un Gentilhome Bourdelois, à qui il avait donné des leçons en particulier, qui les ayant rédigées par écrit, en a composé ce traité à sa manière. Il est vraie qu'en 1668 M. de Roberval revit cet ouvrage avant de le lire dans l'Académie Royale des Sciences; mais il n'y mit la dernière main, s'étant contenté d'écrire seulement en divers endroits quelques remarques, que l'on trouvera à la marge de ce Livre.»

Donner les touchantes des lignes courbes par les mouvements [qui les décrivent].

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connaître les mouvements qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'Invention

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, et on accordera facilement dés qu'on l'aura consideré avec un peu d'attention.

Regle générale

Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) éxaminez les diverses mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante; de tous ces mouvements composez en un seul, tirex la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très générale, et qu'elle peut servir à tous les éxemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de le répéter.

Vous trouverez dans les exemples suivants les touchantes des sections coniques, celles des autres lignes principals qu'on connu les anciens, et celles de quelques unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monsier Pascal, de la Roulette de Monsieur Rob., de la Parabole du second genre de Monsieur Desc. etc.

Roberval présente ensuite des exemples d'application de son principe d'Invention. Le onzième exemple est celui qui nous avons choisi, parce que ceci nous va permettre de comparer sa méthode avec celle de Descartes.

[Roberval: construction de la Roulette]

Onzième exemple, de la Roulette ou Trochoïde de Roberval

Soit proposé le cercle duquel le centre est a, le demi-diamètre aB, et sa touchante BC au point B prolongé en C, l'on imagine que le cercle aB faisant une révolution sur la ligne BC, soit que BC soit égale à la circonférence du cercle, soit qu'elle soit plus grande ou plus petite (ce que je suppose indifférent, et facile à démontrer) le point B de ce cercle étant porté par leux deus mouvements, l'un droit qui le porte de B vers C, l'autre circulaire à cause de la révolution du cercle; que ce point, dis-je, décrit la Roulette ou Trochoïde; ou si vous voulez, ayant tiré par le le centre a la ligne ad égale et paralèlle à BC vers le même coté, l'on imagine que le cercle glissant de B vers C sans tourner à l'entour de son axe, en sorte que le centre a décrive la ligne ad par un mouvement uniforme, em même temps le point B décrive la circonférence de son cercle passant de B par π Q G B d'un mouvement uniforme, et que le centre étant arrivé en d, ce point se retrouve en C, où la ligne touche le cercle, et qu'enfin ces deux mouvements, l'un circulaire, par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de son cercle, l'autre droit, par lequel il est emporté vers C, mellez comme nous avons dit, étant tous deux uniformes, font décrire la Roulette à ce point B.

Dans la première partir, Roberval montre quels sont les deux mouvements uniformes du point B qui décrit sa Roulette et donne une procédure pour construir la courbe par points. Vous devez lire ce texte en présence de la fig. 1 (voir page 2).

Dans la

Page 2 de Rob_Desc_fr.gsp

vous trouverez une construction de la même courbe en géométrie dynamique.

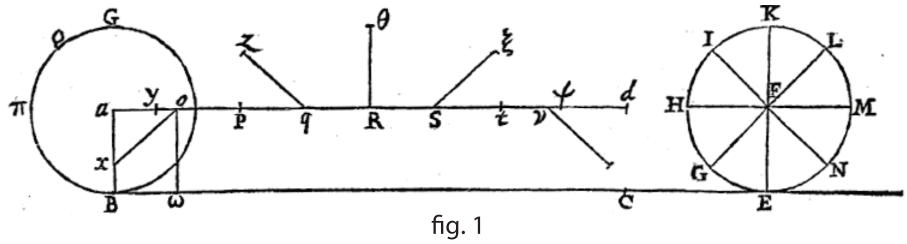


fig. 1

Dans la construction en géométrie dynamique, nous considérons à la page 2 seulement la courbe qui correspond au cas oü la circonférence du cercle qui glisse est égale à la ligne ad, *parce que ceci est le cas considéré par Descartes dans sa recherche des touchantes. Nous ajouterons, en supplément, deux pages du document Sketchpad pour faire l'étude des trois sortes de cycloïdes considérées par Roberval et ses touchantes.*

D'où vous voyez que ces deux mouvements étant uniformes, le point *B* peut décrire trois diverses sortes de Roulettes, suivant que son mouvement circulaire sera proportionné à son mouvement droit, ou si vous voulez suivant la raison de la circonférence de son cercle à la ligne *ad*, que le centre décrit, puisque cette circonférence peut être ou égale à la ligne *ad*, ou plus grande ou plus petite.

Nous ne nous arrêtons pas à considérer les lignes que peuvent être décrites, posé que l'un ou l'autre de ces mouvements, ou même posé que ni l'un ni l'autre ne fût uniforme.

Ceci posé, pour décrire aisement cette ligne, soit prolongée la ligne *BC*, comme en *E*; du point *E* soit tiré *EF,* égale et parallèle à *aB*; du centre *F* décrivez le cercle *EGHIKLMN*, qui sera égal au premier, divisez la circonférence en tant de parties égales que vous voudrez par les points *GHIKLMN*, et tirez par ces points les demi-diamétres du cercle. Divisez la ligne *ad* en autant de parties égales que vous avez divisé la circonférence *GHI*... aux points *oPqRStu*, par le point *o* tirez *ox* égale et paralèlle au rayon *FG*, par *P* tirez *Py* égale et parallele à *FH*, puis *qz* égale et parallèle à *FI*, et ainsi des autres, vous aurez les points *Bxyzθξψ C*, par lesquels la Roulette doit être décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne *ad* un des points de sa division comme par éxemple le premier *o*, et tirez *ow* perpendiculaire sur *BC*, et par conséquent parallelle aux rayons *aB*, *FE*, mais par la description *ox* est parallelle à *FG*, et partant l'angle *xow* est égal à l'angle *GFE*, et décrivant du centre *o* et de l'intervale *ox*, l'arc *xw*, cet arc est égal à l'arc *GE*: mais posé que le centre *a* ait décrit la ligne *ao*, et soit en *o*, le point *B* doit avoir décrit un arc égal à *FG*; car par l'hypotèse *EG* est à sa circonférence totale, comme *ao* est à *ad*, et les mouvements sont uniformes; donc le point *B* a décrit l'arc *wx*, il est donc en *x*, et par conséquent le point *x* est un point de la Roulette; ce qu'il fallait démontrer. L'on démontrera la même chose de tous les autres points.

Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle *GHIKLMN* d'un autre centre pris dans la ligne *ad*, comme du centre *o*, *P*, *R* etc. et faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mêmes points de la Roulette.

[Touchantes: méthode de Roberval]

Ces connaissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette para les mouvements composez; car ayant pris un point de la roulette, et ayant trouvés les deuz directios de son mouvement droit et de son mouvement circulaire; et si l'on étend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne BC ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.

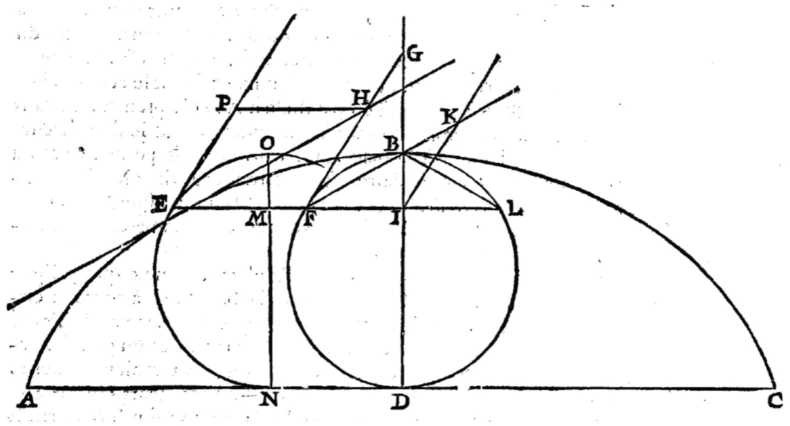


fig. 2

Dans la

Page 3 de Rob_Desc_fr.gsp

vous trouverez une construction de la touchante, suivant la méthode de Roberval, en géométrie dynamique.

[Touchantes: méthode de Roberval, démonstration]

Car soit proposée la Roulette *ABC* de laquelle la base est *ADC* et l'axe *BD*, et que l'on demande la touchante au point *E*. Décrivez le cercle *BFD* de la Roulette, soit autour de l'axe *BD*, soit sur quelque diamètre perpendiculaire à la ligne *ADC*; du point *E* tirez la ligne *EF* parallele à *AC*, et coupant en *F* la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point *E*, si le point *E* étant pris entre *A* et *B*, vous avez décrit le cercle plus vers *C* que le point *E*, sinon au contraire etc.) tirez *FG* touchante au cercle, puis faites que comme *AC* est à la circonférence de cercle, ainsi *EF* soit à *FH*, prenant le point *H* dans la touchante *FG*, du point *H* tirez *HE*, ce sera la touchante de la Roulette.

Fin du texte 1

[Touchantes: méthode de Descartes]

Début du texte 2

Voir **Bibliographic References**

Dans la

Page 4 de Rob_Desc_fr.gsp

vous trouverez une construction de la touchante, suivant la méthode de Descartes, en géométrie dynamique.

La première de ces questions est de trouver les tangentes des courbes décrites par le mouvement d'une roulette. A quoi je réponds que la ligne droite qui passe par le point de la courbe dont on veut trouver la tangente, et par celui de la base auquel touche la roulette pendant quelle le décrit, coupe toujours cette tangente à angles droites. En sorte qu si on veut, par exemple, trouver la ligne droite qui touche au point *B* la courbe *ABC*, décrite sur la base *AD* par l'un des points de la circonférence de la roulette *DNC*, il faut mener par ce point *B* la ligne *BN* parallèle à la base *AD*, puis mener une autre ligne du point *N*, où cette parallèle rencontre la roulette, vers le point *D*, où cette parallèle [?!, roulette] touche la base, et après cela mener *BO* parallèle à *ND*, et enfin *BL*, qui la rencontre à angles droits; car cette ligne *BL* est la tangente cherchée.

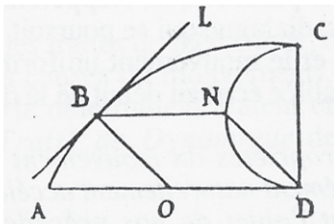


fig. 3

[Touchantes: méthode de Descartes, démonstration][6]

De quoi je ne mettrai ici qu'une démonstration qui est fort courte et fort simple. Si on fait rouler un polygone rectiligne, quel qu'il soit, sur une ligne droite, la courbe décrite par l'un de ses points, quel qu'il soit, sera composée de plusieurs parties de cercles, et les tangentes de tous les points de chacune de ces parties de cercles couperont à angles droits les lignes tirées de ces points vers celui auquel le polygone aura touché la base en décrivant cette partie. Ensuite de quoi, considérant la roulette circulaire comme un polygone qui a une infinité de côtés, on voit clairement qu'elle doit avoir cette même propriété, c'est-à-dire que les tangentes de chacun des points qui sont en la courbe qu'elle décrit doivent couper à angles droits les lignes tirées de ces points vers ceux de la base qui sont touchés par elles au même moment qu'elle les décrit.

Dans la

Page 5 de Rob_Desc_fr.gsp

vous trouverez une version dynamique de la figure 4 de Descartes.

Ainsi, lorsqu'on fait rouler l'hexagone *ABCD* sur la ligne droite *EFGD*, son point *A* décrit la ligne courbe *EHIA*, composée de l'arc *EH*, qu'il décrit pendant que cet hexagone touche la base au point *F* qui est le centre de cet arc, de l'arc *HI* dont le centre est *G*, de l'arc *lA* dont le centre est *D* etc, par les quels centres passent toutes les lignes qui rencontrent les tangentes à' angles droits. Or le même arrive à un polygone de cent mille millions de côtés, et par conséquent aussi au cercle. Je pourrais démontrer cette tangente d'une autre façon plus belle à mon gré et plus géométrique; mais je l'omets pour épargner la peine de l'écrire à cause qu'elle serait un peu plus longue."

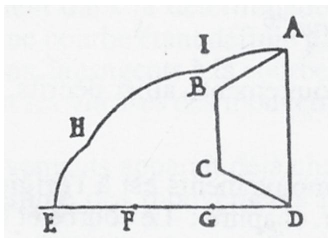


fig. 4

Fin du texte 2

[Supplément: roulettes de diverses sortes et touchantes]

Voir

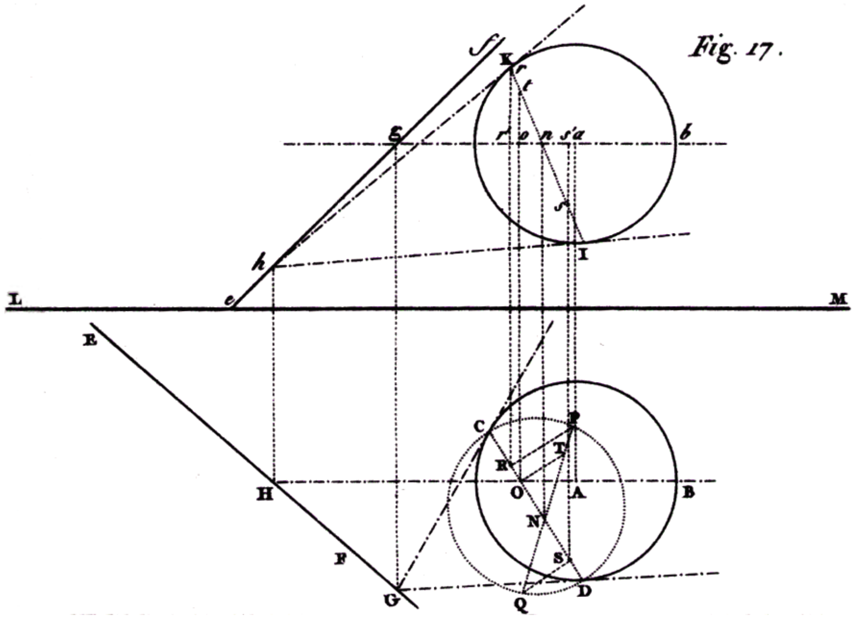
Pages 6 et 7 de Rob_Desc_fr.gsp

La méthode de Roberval s'applique à toutes sortes de cycloïdes (roulement avec et sans glissement). Nous avons ajouté deux pages du document Sketchpad *pour éclairer dynamiquement ces cas.*

Nous vous proposons de lire la deuxième solution de Gaspard Monge pour la question posée ci-dessus, et de l' interpréter avec l'appui de son illustration (Fig. 17), des notes latérales de ce document et du fichier *Sketchpad* Monge_fr.gsp.

Si vous connaissez le programme *Sketchpad* (ou un autre logiciel pour la géométrie dynamique) et si vous disposez d'un ordinateur, vous pouvez essayer de reproduire la construction de Monge. Vous pouvez aussi étudier les pages indiquées du fichier *Sketchpad* pour voir une interprétation pas a pas du dessin de Monge.

La Fig. 17, de Monge, a été reproduite en bas pour qu'on puisse mieux la lire.



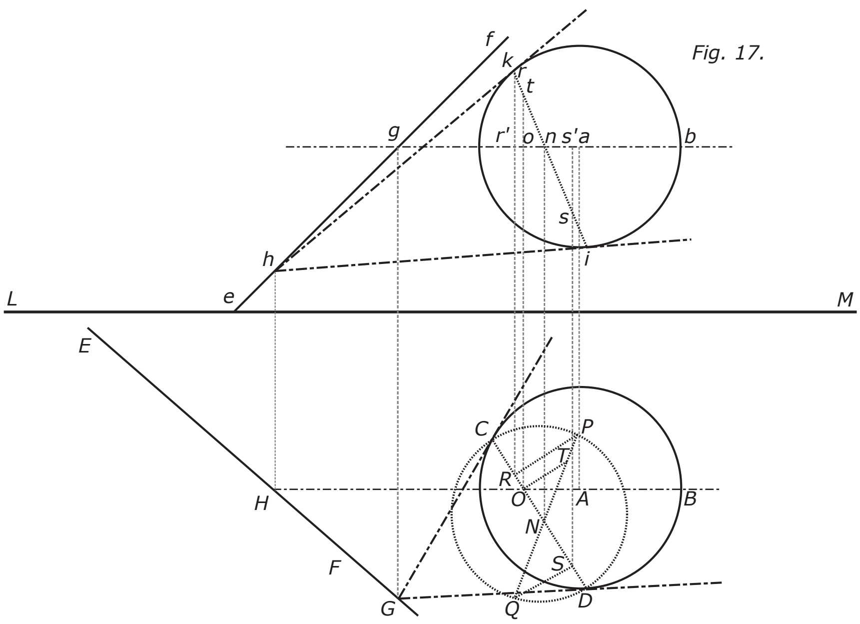
Ouvrez le fichier **Monge_fr.gsp**. *Pour mieux comprendre la construction vous pouvez observer, à chaque moment, en perspective cavalière, non seulement les objets dessinés par Monge mais, parfois, aussi d'autres qu'il a imaginé pour concevoir la méthode de construction de la solution. Pour cela, il suffit de presser les boutons dans le sketch.*

[Représentation des objets donnés]

Début du **text 1**. *Les sous-titres sont ajoutés par nous.*

Page 1 de Monge_fr.gsp

Soient ***A*** et ***a*** (Fig. 17) les deux projections du centre de la sphère, ***AB*** ou ***ab*** son rayon, ***BCD*** la projection de son grand cercle horizontal, et ***EF***, ***ef***, les projections de la droite donnée.



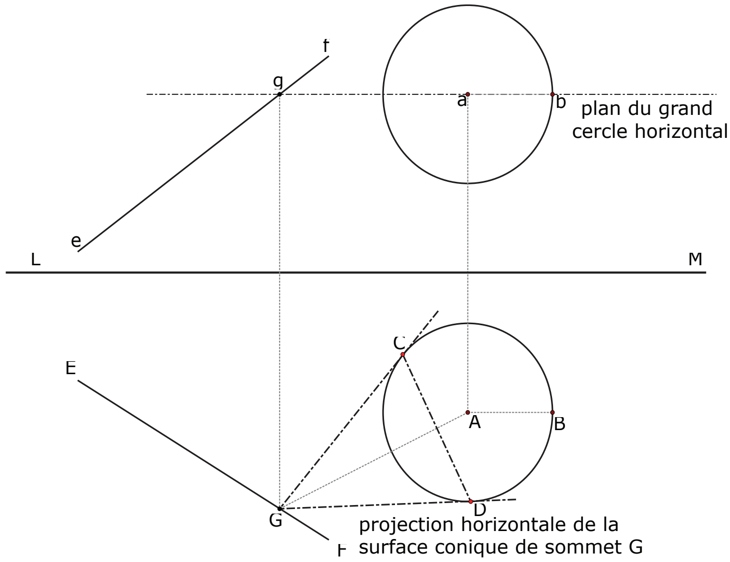
Page 2 de Monge_fr.gsp

Observez la construction du point G et de la projection horizontale de la surface conique de sommet en G et tangente à la sphère. Observez aussi la perspective et la projection verticale, que Monge n'a pas dessiné parce qu'elle n'est pas nécessaire à la construction.

[Première surface conique]

Si l'on conçoit le plan du grand cercle horizontal prolongé jusqu'à ce qu'il coupe la droite donnée en un certain point, on aura la projection verticale de ce plan en menant par le point ***a*** l'horizontale indéfinie ***bag***; le point ***g***, où cette horizontale coupera ***ef***, sera la projection verticale du point de rencontre du plan avec la droite donnée, et l'on aura la projection horizontale ***G*** de ce point, en projetant ***g*** sur ***EF***.

Cela posé, si, en prenant ce même point pour sommet, on conçoit une surface conique qui enveloppe la sphère, et dont toutes les droites génératrices la touchent chacune en un point, on aura les projections des deux droites génératrices horizontales de cette surface conique en menant par le point ***G*** les deux droites ***GC***, ***GD***, tangentes



au cercle ***BCD*** et qui le toucheront en deux points ***C***, ***D*** , qu'il sera facile de déterminer. La surface conique touchera celle de la sphère dans la circonférence d'un cercle, dont la droite ***CD*** sera le diamètre, dont le plan sera perpendiculaire à l'axe du cône, et par conséquent vertical, et dont la projection horizontale sera la droite ***CD***.

[Explication]

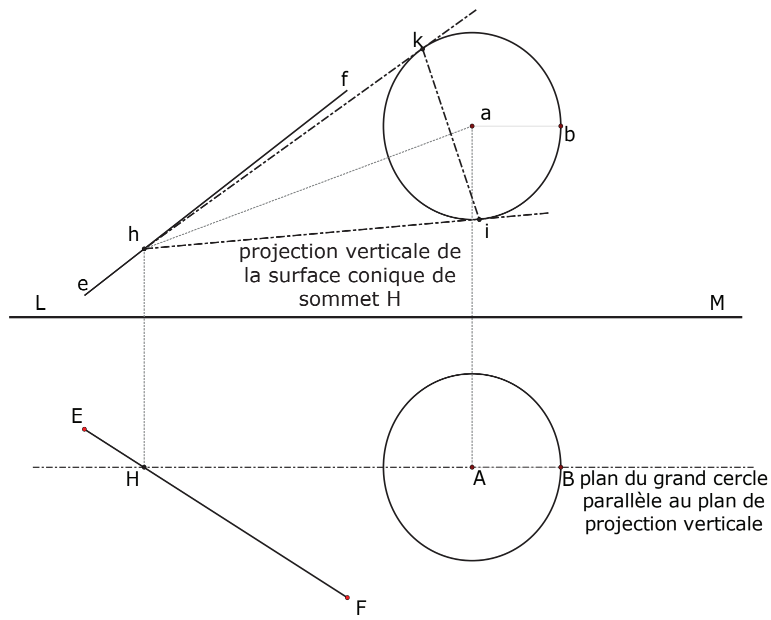
Si par la droite donnée on conçoit deux plans tangents à la surface conique, chacun d'eux la touchera suivant une de ces droites génératrices, qui sera en même temps sur la surface conique et sur le plan ; et parce que cette droite génératrice touche aussi la surface de la sphère en un de ses points qui se trouve sur la circonférence du cercle projeté en ***CD***, il s'ensuit que ce point est en même temps sur la surface conique, sur le plan qui la touche, sur la surface de la sphère et sur la circonférence du cercle projeté en ***CD***, et qu'il est un point de contact commun à tous ces objets. Donc, 1°. les deux plans tangents à la surface conique sont aussi tangents à la surface de la sphère, et sont ceux dont il faut déterminer la position, 2°. leurs points de contact avec la sphère, étant dans la circonférence du cercle projeté en ***CD***, seront eux-mêmes projetés quelque part sur cette droite, 3°. la droite qui passe par les deux points de contact, étant comprise dans le plan du même cercle, sera projetée elle-même indéfiniment sur ***CD***.

Page 3 de Monge_fr.gsp

Observez la construction du point H et de la projection verticale de la surface conique de sommet en H et tangente à la sphère. Observez aussi la perspective et la projection horizontale, que Monge n'a pas dessiné parce qu'elle n'est pas nécessaire à la construction.

[Deuxième surface conique]

Actuellement faisons pour le plan d'un grand cercle parallèle à celui de la projection verticale, la même opération que nous venons de faire pour le plan du grand cercle horizontal. La projection horizontale de ce plan sera la droite ***BAH***, indéfiniment parallèle a ***LM***; le point où il rencontre la droite donnée, sera projeté horizontalement à l'intersection ***H*** des deux droites ***EF***, ***BAH***; et l'on aura sa projection verticale en projetant le point ***H*** sur ***ef*** en ***h***. Si l'on conçoit une nouvelle surface conique dont le sommet soit en ce point de rencontre et qui enveloppe la sphère comme la première, on aura les projections verticales des deux droites génératrices extrêmes de cette surface, en menant par le point ***h*** au cercle ***AKl*** les tangentes ***hK***, ***hI***, qui le toucheront en



des points ***K***, I, que l'on déterminera. Cette seconde surface conique touchera celle de la sphère dans la circonférence d'un nouveau cercle dont ***KI*** sera le diamètre, et dont le plan, qui sera perpendiculaire à celui de la projection verticale, sera par conséquent projeté indéfiniment sur KI. La circonférence de ce cercle passera aussi par les deux points de contact de la sphère avec les plans tangents demandés; donc les projections verticales de ces deux points de contact seront quelque part sur ***KI***; donc aussi la droite, qui joint ces deux points, sera projetée sur la même droite ***Kl***.

[Détermination des deux points de contact]

Page 4 de Monge_fr.gsp

Pressez les boutons successivement pour voir apparaître les objets décrits par Monge.

*Les logiciels de géométrie dynamique nous permettent de construire et voir aussi la projection verticale du cercle de contact vertical (***Bouton 4****).*

Ainsi la droite menée par les deux points de contact est projetée horizontalement sur ***CD***, et verticalement sur ***Kl***; elle rencontre le plan du grand cercle horizontal en un point, dont la projection verticale est à l'intersection ***n*** de ***KI*** avec ***bag***, et dont on aura la projection horizontale ***N*** en projetant le point ***n*** sur ***CD***.

Cela fait, concevons que le plan du cercle vertical, projeté en ***CD***, tourne autour de son diamètre horizontal comme charnière, pour devenir lui-même horizontal, et qu'il entraîne avec lui, dans son mouvement , les deux points de contact par lesquels passe sa circonférence, et la droite qui joint ces deux points. On construira ce cercle dans cette nouvelle position, en décrivant sur ***CD*** comme diamètre, le cercle ***CPDQ***; et si l'on construisoit la position que prend la droite des deux points de contact, elle couperoit la circonférence ***CPDQ*** en deux points, qui les détermineroient sur cette circonférence considérée dans sa position horizontale.

Bouton 5 Or, le point ***N*** de la droite des deux contacts, étant sur la charnière ***CD***, ne change pas de position dans le mouvement. Cette droite doit donc encore passer par ce point, lors qu'elle est devenue horizontale. De plus, le point où elle rencontre le plan du grand cercle parallèle à la projection verticale, point dont la projection horizontale est à la rencontre ***O*** des deux droites ***CD***, ***BAH***, et dont on aura la projection verticale ***t*** en projetant le point ***O*** sur ***KI***; ce point, dis-je , dans son mouvement autour de la charnière ***CD***, décrit un quart de cercle vertical perpendiculaire à ***CD*** , et dont le rayon est la verticale ***ot***; donc, si on mène par le point ***O*** une perpendiculaire à ***CD***, et si sur cette perpendiculaire on porte ***ot*** de ***O*** en ***T***, le point ***T*** sera un de ceux de la droite des contacts, lorsqu'elle est devenue horizontale. Donc, si par les points ***N*** et ***T***

Bouton 6 on mène une droite, ses deux points de rencontre ***P***, ***Q***, avec la circonférence ***CPDQ***,

Bouton 7 seront les deux points de contact considérés dans le plan vertical abattu.

Pour avoir les projections horizontales des deux mêmes points dans leurs positions naturelles, il faut concevoir que le cercle ***CPDQ*** retourne dans sa position primitive en tournant sur la même charnière ***CD***. Dans ce mouvement, les deux points ***P***, ***Q***, décriront des quarts de cercle dans des plans verticaux, perpendiculaires à ***CD***, et dont les projections horizontales seront les perpendiculaires ***PR*** et ***QS***, abaissées sur ***CD***. Donc les projections horizontales des deux points de contact seront respectivement sur les droites ***PR*** et ***QS***: or nous avons vu qu'elles dévoient être aussi sur ***CD***; donc elles, seront aux deux points de rencontre ***R*** et ***S***.

Bouton 8

On aura les projections verticales ***r***, ***s*** des deux mêmes points, en projetant les points ***R*** et ***S*** sur ***KI***; ou, ce qui revient au même, en portant sur les verticales ***Rr***, ***Ss***, à partir de l'horizontale ***bag***, ***r'r*** égale à ***PR***, et ***s's*** égale à ***QS***.

Les projections horizontales et verticales des deux points de contact étant construites, on déterminera les traces des deux plans tangens, comme dans la première solution.

Fin du **text 1**.

[Construction des traces des deux plans tangents]

Page 5 de Monge_fr.gsp

Nous avons ajouté une page dans le fichier *Sketchpad* où nous avons déterminé les traces du plan tangent *EFR*, et aussi représenté ce plan en perspective cavalière.

I. Piero della Francesca

On the perspective plane to construct [the image] of a given square

Piero della Francesca (c. 1413-1492)

Text 1/French

Extracted from the book

Piero della Francesca. *De la Perspective en Peinture*. Translated from the latin text by Jean-Pierre Neraudau. Paris: In Media Res, 1998.

Pages 78-80.

Text 1/English

Free translation of text1/French.

II. Albrech Dürer and Germinal P. Dandelin

Conic sections by double projection and Dandelin spheres

Albrecht Dürer (1471-1528)

Text 1/French

Extracted from the book

Albrecht Dürer. *Instruction sur la Manière de Mesurer*. Translated from the German by Jeannine Bardy and Michael Van Peene. Paris: Flammarion, 1995.

Pages 54-55.

Text 1/English

Free translation of Text 1/French.

Germinal Pierre Dandelin (1794-1847)

Text 2/French

Extracted from

Dandelin, G. Mémoire sur l'Hyperboloïde de Révolution et sur les Hexagones de Pascal et de M. Brianchon. In *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, vol. 3, 1826.

Göttinger Digitalisierungs-Zentrum

Pages 3-4.

Text 2/English

Free translation of text 2/French.

III. Gilles P. de Roberval and René Descartes

The tangent to the cycloid

Gilles Personne de Roberval (1602-1675)

Text 1/French

Extracted from

Roberval, Gilles Personne de. *Divers ouvrages de M. de Roberval*. 1693. In Gallica, site of the Bibliothèque Nationale de France, address: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k862896

Pages 80 and 105-107.

Text 1/English

Free translation of text 1/French.

René Descartes (1596-1650)

Text 2/French

Extract from a letter to Père Mersenne, cited in (page 130)

Commission Inter-IREM, *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*. IREM de Lyon, 1992.

Text 2/English

Extract from a letter to Père Mersenne, cited in (page 144)

Commission Inter-IREM. *History of Mathematics, History of Problems*. Paris: Éditions Ellipses, 1997.

IV. Gaspard Monge

To find a plane tangent to the surface of a given sphere and containing a given line

Gaspard Monge (1746-1818)

Text 1/French

Extracted from

Monge, Gaspard. *Géométrie Descriptive*. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1989

Pages 47-49.

Text 1/English

Free translation of text 1/French.